Sistemas Lineales

Apéndice al tema 3: Propiedad de integración

1. Introducción

En la sección de propiedades sobre la transformada de Fourier hemos estudiado que, si $x(t)$ tiene transformada de Fourier $X(\omega)$, su función integral, definida por la ecuación:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau, \tag{1}$$

tiene como transformada de Fourier:

$$Y(\omega) = \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega). \tag{2}$$

La primera parte de la ecuación es muy intuitiva, ya que corresponde al operador inverso de la derivada. En cambio el origen de la delta de Dirac que aparece en el segundo término y que, recordemos, está asociada al valor medio de $x(t)$ es difícil de explicar. El propósito de este apéndice es mostrar el origen de esta expresión.

En primer lugar notemos que $y(t)$ es una primitiva de la señal $x(t)$: $dy(t)/dt = x(t)$. Recordemos que cualquier función tiene infinitas primitivas que se diferencian por una constante. Al integrar desde menos infinito estamos eligiendo una primitiva concreta, pero otras posibles primitivas de $x(t)$ podrían obtenerse como:

$$y_K(t) = \int_{-K}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{K} x(\tau)d\tau = y(t) - C, \tag{3}$$

donde C es una constante que depende del valor de K. Por tanto cualquier señal $y_K(t)$ será una primitiva de $x(t)$ porque $dy_K(t)/dt = x(t)$, y se distinguirá de $y(t)$ solamente en una constante. En concreto, $y(t) = y_{-\infty}(t)$. Dada la linealidad de la transformada de Fourier, la señal $Y_K(\omega)$ será la misma que la de $Y(\omega)$ menos la transformada de C:

$$Y_K(\omega) = Y(\omega) - \mathfrak{F}\left\{C\right\}(\omega) = Y(\omega) - 2\pi C\delta(\omega), \tag{4}$$

ya que sabemos que la transformada de una constante es una delta pesada por 2π. Intuitivamente, vemos que la delta de Dirac debe estar asociada a la constante de integración C. Según la ecuación (2), esta constante es nula sólo si el valor medio de $x(t)$ es nulo.

2. Relación de la propiedad anterior con la función escalón

La forma más sencilla de demostrar la propiedad enunciada en la ecuación (2) es relacionarla con la transformada de Fourier de la función escalón. En particular, se puede demostrar que la transformada de Fourier de la función de Heaviside $u(t)$ es:

$$U(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega). \tag{5}$$

De esta forma, la integral de la ecuación (1) puede transformarse en la convolución de $x(t)$ con la función escalón:

$$y(t) = x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau; \tag{6}$$

la transformada de Fourier de $Y(\omega)$ será el producto de las transformadas:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)X(\omega) = \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega). \tag{7}$$

Para demostrar la ecuación (5), relacionamos la función escalón con la función signo:

$$\mathrm{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ -1, & t < 0, \end{cases} \tag{8}$$

cuya transformada de Fourier es, como demostramos a continuación:

$$S(\omega) = \frac{2}{j\omega}. \tag{9}$$

Por tanto, aplicando la linealidad de la transformada de Fourier concluiremos:

$$u(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sign}(t) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow U(\omega) = \frac{1}{2}S(\omega) + \pi\delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega). \tag{10}$$

3. Demostración de la propedad (2)

Todo se reduce a demostrar la ecuación (9): de esta forma es inmediato calcular la transformada de la función escalón como en la ecuación (10). A partir de esta expresión es también inmediato demostrar la propiedad usando la ecuación (7).

Para la demostración utilizaremos la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier. Según dicha ecuación la función signo debe ser:

$$\mathrm{sign}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{j\omega|t|}}{j\omega} d\omega = 1, & t > 0; \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\infty}^{\infty} \frac{2e^{-j\omega|t|}}{j\omega} d\omega = -1, & t > 0. \end{cases} \tag{11}$$

Desafortunadamente las integrales anteriores no son triviales. Su cálculo requiere el uso del **Teorema de los Residuos**, como se muestra a continuación.

3.1. Planteamiento del problema ($t > 0$)

Consideremos la figura 1, que representa el plano complejo ($z = u + jv$) y dentro de él la curva $\Gamma = \Gamma_1^R \cup \Gamma_2^R \cup \Gamma_3^R$. Cada una de las tres curvas de las que se compone Γ puede parametrizarse como:

$$\Gamma_1^R \equiv z(\theta) = Re^{j\theta}, \quad \theta \in [0, \pi); \tag{12}$$

$$\Gamma_2^R \equiv z(\theta) = \theta, \quad \theta \in [-R, -\frac{1}{R}) \cup [\frac{1}{R}, R); \tag{13}$$

$$\Gamma_3^R \equiv z(\theta) = \frac{1}{R}e^{j\theta}, \quad \theta \in [\pi, 2\pi). \tag{14}$$

Consideremos también la función de variable compleja definida como:

$$f(z) = \frac{e^{j|t|z}}{jz}, \tag{15}$$

que es el integrando de nuestra transformada inversa de Fourier para $t > 0$, en la que hemos pasado de la variable **real** ω a la variable **compleja** z. Esta función es holomorfa

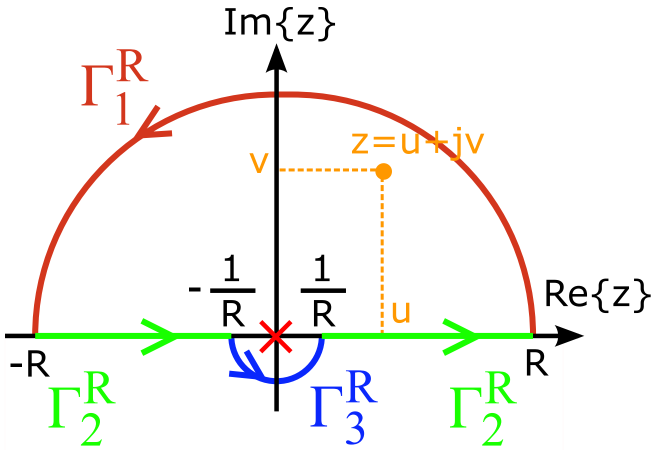

Figura 1: Para calcular la transformada inversa correspondiente a la función signo relacionamos la integral que la define con una integral en el plano complejo. Extrapolaremos la función en la variable real ω a una función en la variable compleja $z = u + jv$. La integral a lo largo de la curva cerrada Γ, que resulta de la unión de las tres curvas orientadas de la figura, se calcula usando el Teorema de los Residuos. Si $R \to \infty$ la integral a lo largo de Γ_2^R se transforma en la integral que deseamos calcular, a lo largo del eje real $u \equiv \omega$.

(generalización del concepto de derivable para variable compleja) salvo en el punto $z = 0$, donde presenta una singularidad (discontinuidad). Esta condición nos permite usar el Teorema de los Residuos para calcular la integral de linea de $f(z)$ a lo largo de la curva Γ:

$$\oint_\Gamma f(z) d\Gamma = 2\pi j \text{Res}\left\{f(z), z = 0\right\}, \tag{16}$$

donde $\text{Res}\{f(z), z = 0\}$ es el residuo de $f(z)$ en $z = 0$. Puesto que el polo en $z = 0$ es simple este residuo se puede calcular de la siguiente forma:

$$\text{Res}\left\{f(z), z = 0\right\} = \lim_{z \to 0} (z - 0) f(z) = \frac{1}{j}. \tag{17}$$

Por tanto, podemos concluir:

$$\oint_\Gamma f(z) d\Gamma = 2\pi j \frac{1}{j} = 2\pi. \tag{18}$$

A continuación relacionaremos este valor con nuestra integral de interés. Es importante notar que la integral anterior **no depende** del valor de R, y por tanto:

$$\lim_{R \to \infty} \oint_\Gamma f(z) d\Gamma = 2\pi. \tag{19}$$

3.2. Cálculo alternativo de la integral de linea

La integral de la ecuación (16) puede calcularse de forma alternativa mediante la definición de integral de linea en el plano complejo:

$$\oint_\Gamma f(z) d\Gamma = \oint_{\Gamma_1^R \cup \Gamma_2^R \cup \Gamma_3^R} f(z) d\Gamma = \int_{\Gamma_1^R} f(z) d\Gamma_1^R + \int_{\Gamma_2^R} f(z) d\Gamma_2^R + \int_{\Gamma_3^R} f(z) d\Gamma_3^R. \tag{20}$$

Estas tres integrales se calculan a partir de las parametrizaciones correspondientes.

1. Para la primera de ellas:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1^R} f(z)d\Gamma_1^R &\triangleq \int_0^\pi f\left(z(\theta)\right)\frac{dz(\theta)}{d\theta}d\theta = \int_0^\pi f\left(Re^{j\theta}\right)jRe^{j\theta}d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\exp\left(j|t|Re^{j\theta}\right)}{jRe^{j\theta}}jRe^{j\theta}d\theta = \int_0^\pi \exp\left(j|t|Re^{j\theta}\right)d\theta. \quad (21)\end{aligned}$$

Esta integral no es sencilla de calcular, pero en realidad no lo necesitamos. Basta con comprobar que la parte real de $j|t|Re^{j\theta}$, en la región considerada, es negativa y por tanto el módulo del integrando es una exponencial decreciente en R:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_1^R} f(z)d\Gamma_1^R = 0. \quad (22)$$

2. Para la segunda parte de la curva Γ tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2^R} f(z)d\Gamma_2^R &= \int_{-R}^{-\frac{1}{R}} f\left(\theta\right)d\theta + \int_{\frac{1}{R}}^{R} f\left(\theta\right)d\theta \\ &\Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_2^R} f(z)d\Gamma_2^R = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)d\theta = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j|t|\theta}}{j\theta}d\theta, \quad (23)\end{aligned}$$

que es precisamente la integral que define nuestra transformada de Fourier inversa y por tanto no es trivial (en otro caso no necesitaríamos todo este desarrollo).

3. Para la tercera integral repetimos un desarrollo parecido al de la ecuación (21):

$$\int_{\Gamma_3^R} f(z)d\Gamma_3^R = \int_{\pi}^{2\pi}\exp\left(j|t|\frac{1}{R}e^{j\theta}\right)d\theta. \quad (24)$$

Aunque la integral en sí no es sencilla de calcular, su límite para $R\to\infty$ sí lo es:

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_3^R} f(z)d\Gamma_3^R &= \lim_{R\to\infty}\int_{\pi}^{2\pi}\exp\left(j|t|\frac{1}{R}e^{j\theta}\right)d\theta \\ &= \lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{2\pi}\exp\left(j|t|re^{j\theta}\right)d\theta = \int_{\pi}^{2\pi}d\theta = \pi. \quad (25)\end{aligned}$$

3.3. Cálculo de la integral en la segunda curva

Reuniendo los resultados anteriores, podemos concluir:

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma} f(z)d\Gamma &= 2\pi = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_1^R} f(z)d\Gamma_1^R + \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_2^R} f(z)d\Gamma_2^R + \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_3^R} f(z)d\Gamma_3^R \\ &= 0 + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j|t|\theta}}{j\theta}d\theta + \pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j|t|\theta}}{j\theta}d\theta = \pi. \quad (26)\end{aligned}$$

3.4. Valor final de la transformada

Volviendo sobre la ecuación (11) para $t > 0$ podemos concluir que efectivamente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2e^{j|t|\omega}}{j\omega}d\omega = \frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j|t|\theta}}{j\theta}d\theta = \frac{2\pi}{2\pi} = 1, \quad (27)$$

sin más que hacer $\omega = \theta$. Para $t < 0$ habría que repetir todo el cálculo cambiando la curva de integración Γ. En este caso habría que incluir Γ_1 en el semiplano negativo para que la integral correspondiente tendiese a 0 al hacer $R \to \infty$, pero todos los cálculos serían muy similares y concluiríamos que la integral vale -1 (el signo $-$ vendría del cambio de orientación de Γ_2, que debería recorrerse en sentido inverso para que Γ se recorra en sentido positivo –a izquierdas– y el Teorema de los Residuos pueda aplicarse). Para $t = 0$, nótese que dicha integral nunca tendería a 0 (para ningún semiplano), pero sabemos que el valor de la transformada (inversa) para puntos aislados es irrelevante. Visto de otro modo, para $t = 0$ tendríamos la integral:

$$\text{sign}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{j\omega} d\omega, \tag{28}$$

que no es convergente. No obstante, puesto que el integrando es impar, podemos definir $\text{sign}(0) = 0$ por coherencia con las propiedades de este tipo de señales. Una vez más, el valor de la función en un punto aislado no es relevante en el ámbito del análisis de Fourier, y en particular no afecta a la integral de convolución en la ecuación (6).