Sistemas Lineales

Examen de Febrero 2010

1. **Sea la señal $x[n] = e^{-a|n|}$, con a un número complejo.**

   (a) Asumiendo que $\Re\{a\} > 0$, calcule $y_1[n] = x[n] * x[n]$.

   (b) Asumiendo que $\Re\{a\} > 0$, calcule $y_2[n] = x[n-4] * x[n-4]$.

   (c) Para cualquier valor de a, calcule la transformada Z de $x[n]$.

   (d) Asumiendo que $\Re\{a\} > 0$, calcule la energía, potencia media y potencia instantánea de $x[n]$ en función de a.

   (e) Suponga un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n] = x[n]$. Estudie su estabilidad y su causalidad. Calcule la respuesta al impulso del sistema inverso (para aquellos valores de a en que exista).

La señal puede escribirse de la siguiente forma:

$$x[n] = e^{-an}u[n] + e^{an}u[-n-1]$$

(a) La convolución puede hacerse de dos formas: (1) en el dominio temporal y (2) en un dominio transformado, bien Fourier o bien Z.

La convolución temporal sería de la forma:

$$\begin{aligned}
y_1[n] &= \sum_{k=-\infty}^{-1} e^{ak}x[n-k] + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak}x[n-k] \\
&= \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{n} e^{ak}e^{-a(n-k)} + \sum_{k=n+1}^{-1} e^{ak}e^{a(n-k)} + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak}e^{a(n-k)} & n < 0 \\ \\ \sum_{k=-\infty}^{-1} e^{ak}e^{-a(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} e^{-ak}e^{-a(n-k)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-ak}e^{a(n-k)} & n \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(\frac{2}{1-e^{-2a}} - (n+1)\right)e^{an} & n < 0 \\ \\ \left(\frac{2e^{-2a}}{1-e^{-2a}} + (n+1)\right)e^{-an} & n \geq 0 \end{cases} \\
&= \left(\frac{2e^{-2a}}{1-e^{-2a}} + (n+1)\right)e^{-an}u[n] + \left(\frac{2}{1-e^{-2a}} - (n+1)\right)e^{an}u[-n-1]
\end{aligned}$$

Usando la transformada Z, la solución sería:

$$\begin{aligned}
Y_1(Z) &= X(z)X(z) \\
&= \left(\frac{1}{1-e^{-a}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{a}z^{-1}}\right)^2
\end{aligned}$$

con ROC $e^{-\Re\{a\}} < |z| < e^{\Re\{a\}}$. Al calcular la inversa, da la misma solución que la obtenida con la convolución temporal.

(b) Aplicando propiedades:

$$y_2[n] = x[n-4] * x[n-4] = y_1[n-8]$$

(c) Hay que tener cuidado con las regiones de convergencia. Nótese que

$$|e^a| = e^{\Re\{a\}}.$$

De este modo, si $\Re\{a\} > 0$

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-a}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{a}z^{-1}}$$

con ROC $e^{-\Re\{a\}} < |z| < e^{\Re\{a\}}$. Por otro lado, nótese que si $\Re\{a\} \leq 0$ no va a existir región de convergencia, y por tanto no va a existir la transformada Z de la señal.

(d) Definimos la energía de la señal

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} |e^{an}|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |e^{-an}|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{2\Re\{a\}n} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\Re\{a\}n} \\ &= \frac{e^{2\Re\{a\}n}}{1 - e^{2\Re\{a\}n}} + \frac{1}{1 - e^{-2\Re\{a\}n}} \\ &= \frac{1 + e^{-2\Re\{a\}n}}{1 - e^{-2\Re\{a\}n}} \end{aligned}$$

La potencia instantánea será

$$p_i[n] = |x[n]|^2 = e^{2\Re\{a\}n}u[-n-1] + e^{-2\Re\{a\}n}u[n]$$

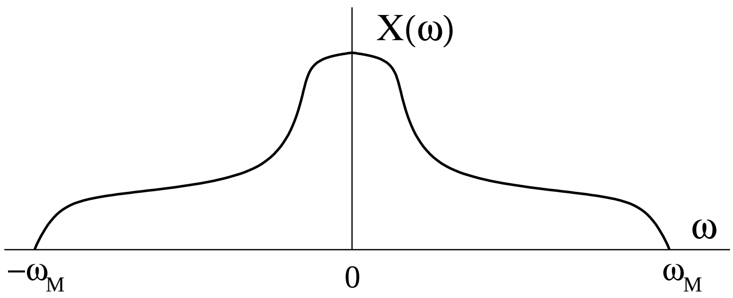
y la potencia media de la señal será $P_{av} = 0$.

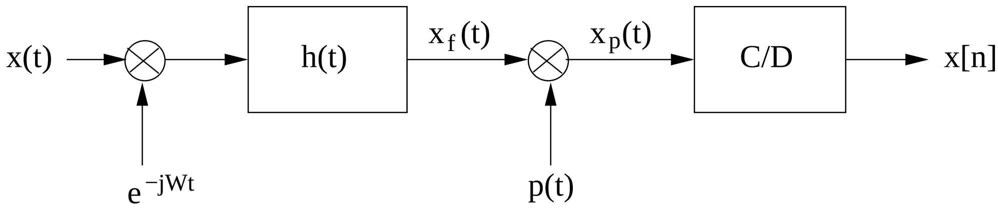
(e) El sistema es estable y no causal. Se puede demostrar a partir de la respuesta al impulso o de su transformada Z. Su inversa será

$$\begin{aligned} H_i(z) &= \frac{1}{H(z)} \\ &= \frac{1 + z^{-2} - (e^{-a} + e^{a})z^{-1}}{(e^{-a} - e^{a})z^{-1}} \\ &= \frac{1}{e^{-a} - e^{a}} \left(z + z^{-1} - (e^{-a} + e^{a})\right) \\ h_i[n] &= \frac{1}{e^{-a} - e^{a}} \left(\delta[n+1] + \delta[n-1] - (e^{-a} + e^{a})\delta[n]\right) \end{aligned}$$

2. **Sea una señal de audio $x(t)$, tal que su transformada de Fourier $X(\omega) = 0$ si $|\omega| > \omega_M$, con $\omega_M = 4\pi \cdot 10^4$, tal y como se muestra en la figura: Se asume que $X(\omega)$ es además real y par. Se pretende diseñar un sistema de comunicación móvil digital, para lo que va a ser necesario acondicionar la señal a los requerimientos del sistema, de acuerdo con el siguiente esquema:**

- $W = 2\pi \cdot 3,4 \cdot 10^3$.
- $h(t)$ **es un filtro pasobajo de ganancia 1 y frecuencia de corte** $3,4kHz$.
- $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$, **con** T **el periodo de muestro que se corresponde con la frecuencia de Nyquist.**





Se pide:

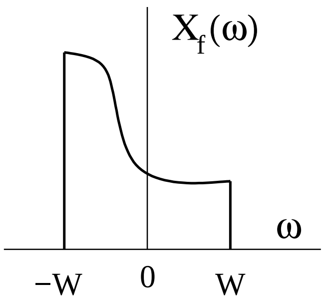
(a) **Dibuje la transformada de Fourier de las señales $x_p(t)$ y $x[n]$.**

(b) **Proponga un esquema para recuperar una versión pasobajo de $x(t)$ a partir de $x[n]$. Represente el esquema en el dominio temporal.**

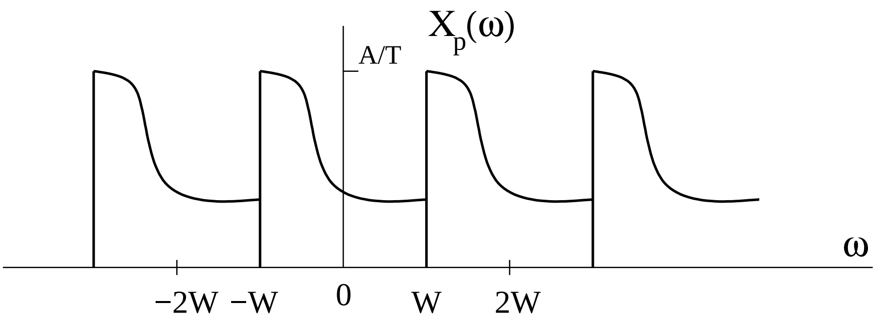
(a) Según el esquema propuesto, $X_f(\omega)$ es una versión desplazada y filtrada de $X(\omega)$:

$$X_f(\omega) = X(\omega + W)H(\omega)$$

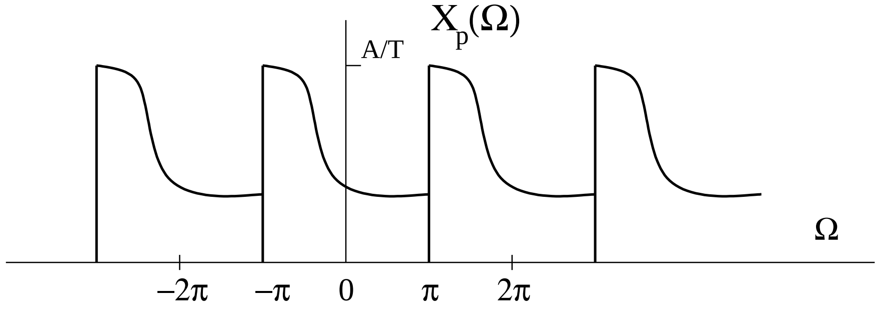
Asumiendo que la señal tiene una altura A, muestreamos la señal $x_f(t)$. la frecuencia de



Nyquist será el doble de la frecuencia máxima de la señal a muestrear, esto es $\omega_s = 2W$ (con $W = 2\pi \cdot 3,4 \cdot 10^3$). De este modo, la señal muestreada en el dominio de frecuencia de tiempo continuo queda:



con $T = (2\pi)/W$. y en frecuencia de tiempo discreto:



(b) Para recuperar la señal será necesario:

- Conversión de deltas discretas a continuas. ($x[n]$ a $x_p(t)$).
- Realizar un filtrado pasobajo con frecuencia de corte W y ganancia T, para recuperar así la señal $x_f(t)$.
- Desplazamiento en frecuencia para centrar la señal, $X_m(\omega) = X_f(\omega - W)$.
- Dado que la señal es real y par, la señal original cumple que $X(\omega) = X(-\omega)$. Sólo disponemos de una versión pasobajo de la mitad de la transformada de Fourier de la señal. Para recuperar la señal entera tendremos que abatir la TF:

$$X_{LP}(\omega) = X_m(\omega) + X_m(-\omega) = 2\text{Par}\{X_m(\omega)\}$$

En el dominio temporal esto es

$$x_{LP}(t) = x_m(t) + x_m(-t) = 2\text{Par}\{x_m(t)\}$$

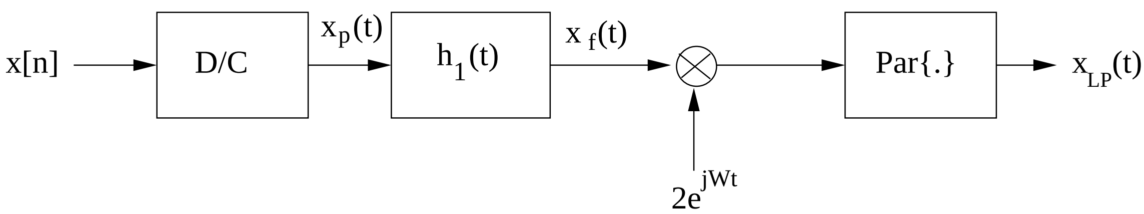
Alternativamente podría plantearse una solución del tipo

$$X_{LP}(\omega) = X_m(\omega) + X_m^*(-\omega)$$

En el dominio temporal esto es

$$x_{LP}(t) = x_m(t) + x_m^*(t) = 2\Re\{x_m(t)\}$$

El diagrama de bloques queda de la siguiente forma



siendo $h_1(t)$ un filtro pasobajo ideal con ganancia T y frecuencia de corte $\omega_c = W$.

3. **Dada la señal $x(t) = u(t + 0.5) - u(t - 0.5)$ y la respuesta al impulso de un sistema LTI $h(t) = e^{j\omega_0 t}$**

(a) **Determine los valores de ω_0 que aseguren que $y(t) = 0$.**

(b) **Demuestre que para una señal $x(t)$ arbitraria la salida será siempre periódica (o nula). Calcule su periodo y su serie de Fourier.**

(a) La señal $x(t)$ es un pulso cuadrado de altura 1 que toma valores en $[-0.5, 0.5]$. La respuesta al sistema $h(t)$ es una autofunción de los sistemas LTI. Aplicando conmutatividad es fácil ver que

$$y(t) = x(t) * e^{j\omega_0 t} = X(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

siendo $X(\omega_0)$ la transformada de Fourier de la señal evaluada en ω_0. Esta TF puede obtenerse directamente de las tablas:

$$X(\omega) = \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega} = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

Por lo tanto

$$y(t) = \text{sinc}\left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right) e^{j\omega_0 t}$$

Para que $y(t) = 0$, $X(\omega_0) =$. Esto se corresponde con los ceros de la sinc, es decir

$$\omega_0 = 2\pi k, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Nótese que $k \neq 0$, ya que en ese punto la sinc vale 1.

(b) Como se ha visto en el apartado anterior, la salida del sistema va a ser

$$y(t) = X(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

Si $X(\omega_0) \neq 0$, la señal de salida será una exponencial compleja, y por lo tanto periódica. Su serie de Fourier será la misma exponencial, con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ y coeficientes de la serie:

$$\begin{aligned} &C_1 = X(\omega_0) \\ &C_k = 0 \qquad\qquad k \neq 1 \end{aligned}$$

4. **En el siguiente problema se explorarán algunas propiedades de la transformada de Laplace. Supóngase que un sistema LTI causal viene descrito mediante una ecuación diferencial con coeficientes constantes de la forma:**

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^{i)}y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{M} b_i \frac{d^{i)}x(t)}{dt^i}$$

donde a_i y b_i con coeficientes constantes.

(a) Si la respuesta al impulso del sistema $h(t)$ es real, estudie qué propiedades han de tener los polos y los ceros de $H(s)$. (NOTA: tenga en cuenta que los polos y los ceros pueden ser complejos).

(b) Encuentre una relación entre N y M si se cumple que $\lim_{s\to\infty} H(s) = 1$.

(c) Encuentre alguna restricción a los coeficientes a_i y b_i si se cumple que $\lim_{s\to 0} H(s) = 1$.

(d) Calcule la respuesta al impulso del sistema $h(t)$ teniendo en cuenta las siguientes propiedades:

- **$h(t)$ es real y causal.**
- **$\lim_{s\to\infty} H(s) = 2$.**
- **$H(s)$ tienes dos ceros complejos.**
- **Uno de los polos de $H(s)$ está en $s = 2 + j$.**
- **Uno de los ceros de $H(s)$ está en $s = -1 - 0.5j$**

(a) Si $h(t)$ es real se cumple que

$$h(t) = h^*(t)$$

lo que en el dominio de Laplace se traduce en

$$H(s) = H^*(s^*).$$

Sabemos que la solución de una ecuación diferencial como la propuesta es de la forma

$$H(s) = K\frac{(s-c_1)(s-c_2)\cdots(s-c_M)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)},$$

y por lo tanto

$$H^*(s^*) = K\frac{(s-c_1^*)(s-c_2^*)\cdots(s-c_M^*)}{(s-p_1^*)(s-p_2^*)\cdots(s-p_N^*)}.$$

Aplicando la propiedad:

$$\frac{(s-c_1)(s-c_2)\cdots(s-c_M)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)} = \frac{(s-c_1^*)(s-c_2^*)\cdots(s-c_M^*)}{(s-p_1^*)(s-p_2^*)\cdots(s-p_N^*)}.$$

Existen dos posibilidades:

- Que los polos (o los ceros) sean reales, con lo que

$$(s-p_1) = (s-p_1^*)$$

- Que los polos (o los ceros) sean complejos. Para que se cumpla la igualdad, han de aparecer en pares conjugados:

$$(s-p_2) = (s-p_1^*)$$

  Por lo tanto, si un polo (o cero) es real, puede ser simple. Si un polo (o un cero) es complejo, ha de aparecer también su conjugado.

(b) Es sencillo ver que $N = M$, además de que $a_N = b_M$.

(c) En caso de existir todos los coeficientes, debe cumplirse que $a_0 = b_0$. En caso de faltar coeficientes, los coeficientes de menor grado deben ser iguales y del mismo orden.

(d) La transformada de Laplace de $h(t)$ será de la forma

$$H(s) = K\frac{(s-c_1)(s-c_2)\cdots(s-c_M)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)},$$

con K una constante. De acuerdo con las indicaciones:

- Por ser $h(t)$ real, los polos y ceros de $H(s)$ han de ser conjugados.
- $\lim_{s\to\infty} H(s) = 2$. Indica que tiene el mismo número de ceros que de polos. Además $K = 2$.
- Al tener dos ceros, tiene también 2 polos.

Por lo tanto, $H(s)$ tendrá dos ceros y dos polos conjugados:

$$H(s) = 2\frac{(s+1+0.5j)(s+1-0.5j)}{(s-2-j)(s-2+j)}.$$

Por ser causal, su ROC será $\Re\{s\} > 2$.

Calculamos ahora su transformada inversa. Para ello, hay que tener en cuenta que el grado del numerador y del denominador es el mismo. Antes de hacer cualquier expansión en fracciones simples habrá que reducir el grado. De este modo:

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{2s^2+4s+2.5}{s^2-4s+5} \\
&= 2+\frac{12s-7.5}{s^2-4s+5} \\
&= 2+12\frac{s-2}{(s-2)^2+1}+\frac{16.5}{(s-2)^2+1} \\
h(t) &= 2\delta(t)+e^{2t}\left[12\cos t+16.5\sin t\right]u(t)
\end{aligned}
$$