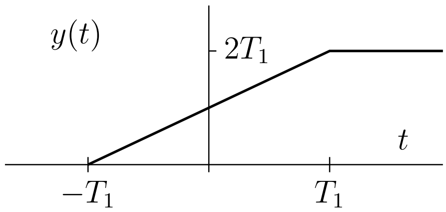
Sistemas Lineales

Examen de Junio 2011

1. **Se desea conocer la respuesta al impulso de un sistema LTI continuo. Para ello se realizan dos experimentos:**

   (a) Cuando la entrada es un escalón continuo, $x(t) = u(t)$, la salida es de la forma



   (b) Cuando la entrada es una señal periódica de periodo $T = 1$ tal que la señal en un periodo se define como

$$x_a(t) = e^{-2t}u(t) \quad 0 \leq t < 1$$

   la salida es un valor constante.

   Calcule la respuesta al impulso del sistema y explique si existe alguna restricción para el valor T_1.

   Cuando la entrada en un sistema es un escalón $u(t)$ a la salida tenemos la *respuesta al escalón*, $s(t)$. Dado que

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

   se cumple que

$$\frac{ds(t)}{dt} = h(t).$$

   Por lo tanto, es inmediato demostrar que

$$h(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases}$$

   Para ver las restricciones de T_1 acudimos a la segunda entrada. Dado que es una entrada periódica de periodo 1, podemos escribirla como una serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi t}$$

   siendo c_k los coeficientes de la serie de Fourier. No es necesario su cálculo, pero lo podemos hacer para asegurarnos que no son nulos:

$$c_k = \frac{1 - e^{-2}}{2 + 2\pi kj}.$$

   La señal a la salida del sistema será una serie de Fourier de la forma

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk2\pi t}$$

con $b_k = c_k \cdot H(k2\pi)$. Como la salida es constante, esto quiere decir que el único coeficiente distinto de cero es b_0, y el resto han de ser nulos. Esto implica que

$$\begin{aligned} H(0) &= \text{constante} \\ H(k2\pi) &= 0 \text{ si } k \neq 0 \end{aligned}$$

$H(\omega)$ es la transformada de Fourier de $h(t)$:

$$H(\omega) = 2T_1 \text{sinc}\left(\omega \frac{T_1}{\pi}\right)$$

Entonces

$$H(k2\pi) = 2T_1 \text{sinc}\left(2kT_1\right).$$

Por lo tanto, los valores de $H(k2\pi)$ para $k \neq 0$ han de caer en los ceros de la sinc. Estos estarán en todos los puntos que hagan entero el argumento:

$$2kT_1 \in \mathbb{Z}$$

Concretamente, T_1 tendrá que ser un múltiplo de 1/2:

$$T1 = \frac{1}{2}n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. **En el siguiente problema se analizará un esquema *real* de muestreo. En muchos esquemas comerciales, para muestrear una señal continua $x(t)$, en lugar de tomar su valor en un punto concreto, $x[n] = x(nT)$, lo que se hace es tomar el valor medio en un intervalo alrededor de ese punto:**

$$x[n] = \frac{1}{T_s} \int_{(n-1/2)T}^{(n+1/2)T} x(t)dt$$

Esto puede modelarse usando un tren de deltas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x[n] &= x_2(nT) \\ x_p(t) &= x_2(t) \cdot p(t) \\ &= [x(t) * h_1(t)] \cdot p(t) \end{aligned}$$

donde

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

y $p(t)$ es un tren de deltas equiespaciadas de la forma

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - kT\right)$$

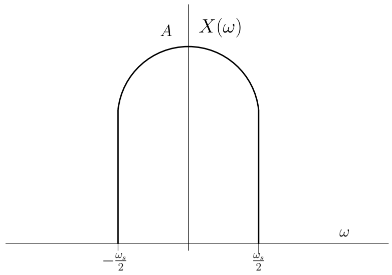
Las señales $x[n]$ y $x_p(t)$ son alternativamente la señal muestreada discreta y la señal muestreada continua. Considerando que la señal $x(t)$ es de banda limitada, tal que $X(\omega) = 0$ si $|\omega| > \frac{\omega_s}{2}$:

(a) **Dibuje la transformada de Fourier de $x_2(t)$, $x_p(t)$ y $x[n]$ en función de la de $x(t)$ (considere una $x(t)$ real y de banda limitada).**

(b) Explique el efecto del esquema de muestreo sobre la señal $x(t)$. Indique si habrá o no aliasing y si la señal podrá recuperarse.

(c) En caso de poderse recuperar alguna de las señales, proponga un esquema para recuperar la señal promediada $x_2(t)$ y/o un esquema para recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

(a) Dado que la señal $x(t)$ es real, su transformada de Fourier será hermítica. Si escojo una $X(\omega)$ real, tendré que escoger una señal par. Como no se indica nada de esta señal, podemos escoger una al azar: Antes de ser muestreada, la señal pasa por un sistema LTI con respuesta



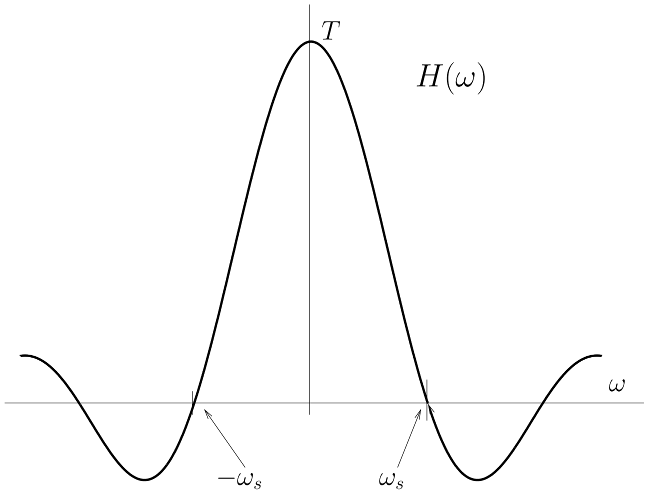
al impulso $h_1(t)$:

$$
\begin{aligned}
x_2(t) &= x(t) * h_1(t) \\
X_2(\omega) &= X(\omega)H_1(\omega) \\
&= X(\omega)\,\frac{2\sin(\omega T_1/2)}{\omega} \\
&= X(\omega) \cdot T\mathrm{sinc}\left(\omega\frac{T}{2\pi}\right) \\
&= T \cdot X(\omega)\ \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)
\end{aligned}
$$

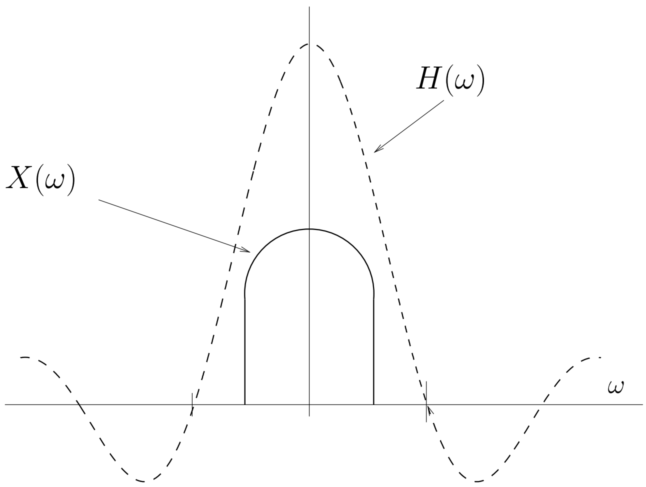
con

$$H_1(\omega) = T\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)$$

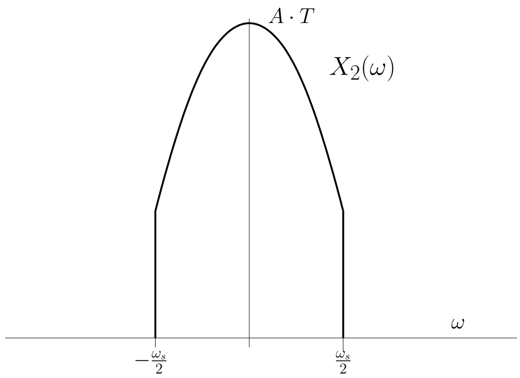
Nótese que los ceros de la sinc se encuentran en todos los múltiplos de ω_s:



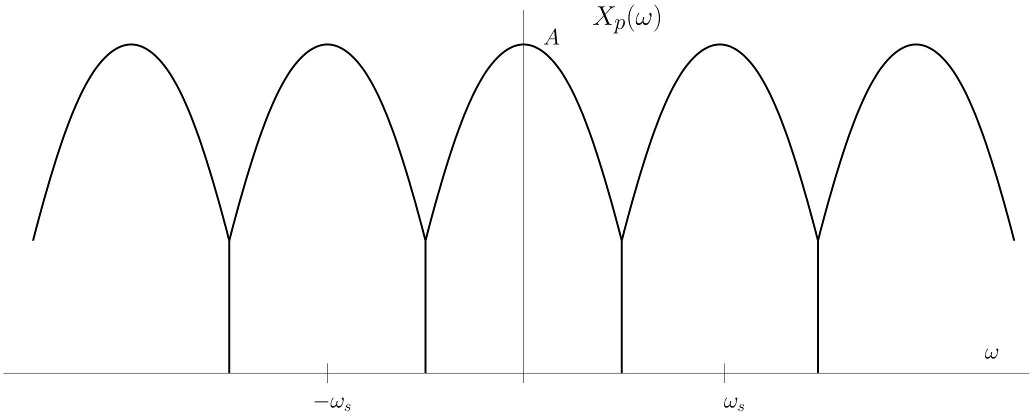
La señal resultante, $X_2(\omega)$, será por lo tanto el producto de $X(\omega)$ con $H(\omega)$:



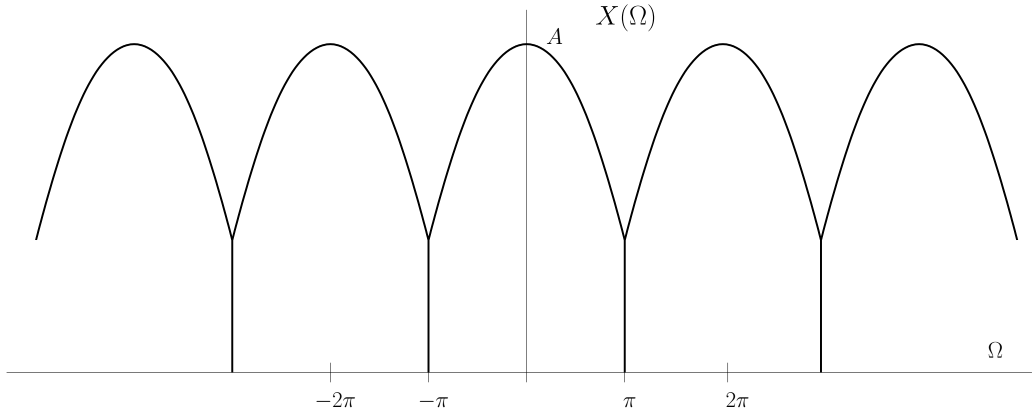
Dado que el primer cero de la sinc está en $\omega = \omega_s$, y que la frecuencia máxima de $X(\omega)$ es $\omega_s/2$, $X_2(\omega)$ tomará valores en la misma banda que $X(\omega)$. Podemos aproximar su forma:



Al muestrear la señal, la transformada de Fourier se multiplicará por T y se replicará en todos los múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo:



La transformada de Fourier de la señal discreta será:



(b) En este apartado hay que estudiar dos efectos: (1) el del muestreo y (2) el del sistema $h_1(t)$ sobre la señal. Como se comentó en el apartado anterior, la señal $X_2(\omega)$ tiene el mismo ancho de banda que $X_2(\omega)$, ya que la convolución con $h_1(t)$ no modifica la anchura de la señal en frecuencia. Por lo tanto, se cumple que:

$$X_2(\omega) = 0 \quad |\omega| > \frac{\omega_s}{2}$$

Por lo tanto, dado que la frecuencia de muestreo es $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, se cumple el teorema de Nyquist y la señal $x_2(t)$ no tendrá aliasing. Por otro lado, dado que los ceros de la sinc caen fuera de la zona en que $X(\omega)$ toma valores, la multiplicación por $H_1(\omega)$ será una operación *invertible*, ya que no se anula ningún valor de $X(\omega)$. En resumen:

- La convolución con $h_1(t)$ no modifica el ancho de banda de la señal, y es una operación invertible, de tal forma que podremos recuperar $x(t)$ a partir de $x_2(t)$.
- Se muestrea la señal a la frecuencia de Nyquist, por lo que no habrá aliasing (siempre y cuando no haya deltas en el extremo).

(c) Para recuperar la señal $x_2(t)$ a partir de $x_p(t)$, simplemente es necesario realizar un filtrado pasobajo:

$$H(\omega) = \begin{cases} T & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

Para recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_2(t)$ tenemos que usar el sistema inverso a $h_1(t)$. Lo definimos en frecuencia. La señal $H(\omega)$ no es invertible debido a los ceros de la sinc. Sin embargo, nótese que los ceros caen fuera de la zona de trabajo, por lo que podemos definir el sistema inverso como:

$$H_i(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{T\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)} & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

3. **La transformada de Fourier de un cierto sistema LTI discreto tiene la expresión siguiente:**

$$H(\Omega) = \frac{2 - e^{-j\Omega}}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}} \tag{1}$$

(a) Obtenga la ecuación en diferencias que relaciona la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ de este sistema.

(b) Si la entrada es $x[n] = \delta[n]$, obtenga la salida $y[n]$.

(c) Suponga ahora que la entrada al sistema es la convolución entre dos señales:

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] \tag{2}$$

donde

$$\begin{aligned} x_1[n] &= (\frac{1}{2})^n u[n] \\ x_2[n] &= \cos(\pi n) \end{aligned} \tag{3}$$

Obtenga y[n].

(a) La respuesta al impulso en frecuencia puede escribirse:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{2 - e^{-j\Omega}}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}}$$

De aquí:

$$Y(\Omega)\left(1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}\right) = X(\Omega)\left(2 - e^{-j\Omega}\right)$$

y haciendo la transformada inversa obtenemos:

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n] - x[n-1].$$

En caso de simplificarse antes la expresión de $H(\omega)$ puede llegarse a la siguiente ecuación:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = 2x[n].$$

(b) La salida cuando la entrada es un impulso, será la respuesta al impulso $h[n]$. Calculamos la transformada inversa de $H(\Omega)$:

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \frac{2 - e^{-j\Omega}}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}} \\ &= \frac{2\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)} \\ &= \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} \\ h[n] = &= 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \end{aligned}$$

(c) El problema puede resolverse por autofunciones. Lo resolveremos mediante la Transformada de Fourier. Se pide:

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] * h[n]$$

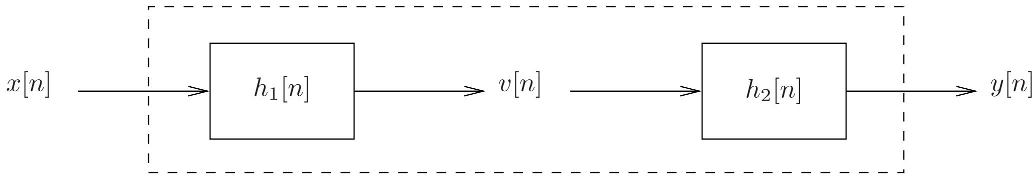
que en Fourier es equivalente a

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= H(\Omega) \cdot X_1(\Omega) \cdot X_2(\Omega) \\ &= \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \cdot \pi\left[\delta_p(\Omega - \pi) + \delta_p(\Omega + \pi)\right] \end{aligned}$$

Al multiplicar una señal por una delta, se evalúa la señal en el punto donde está la delta. De este modo:

$$\begin{aligned}
Y(\Omega) &= \frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\pi}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi}} \cdot \pi\delta_p(\Omega-\pi) + \frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{j\pi}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\pi}} \cdot \pi\delta_p(\Omega+\pi) \\
&= \frac{2}{1+\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \cdot \pi\left[\delta_p(\Omega-\pi)+\delta_p(\Omega+\pi)\right] \\
&= \frac{16}{15}\pi\left[\delta_p(\Omega-\pi)+\delta_p(\Omega+\pi)\right] \\
y[n] &= \frac{16}{15}\cos(\pi n)
\end{aligned}$$

4. **Se considera el siguiente esquema:**



donde $h_1[n]$ es un sistema LTI causal descrito mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$v[n] = e^{-a\cdot T_s}\ v[n-1] + b\ x[n].$$

a y b son dos constantes complejas tales que $\mathcal{R}\{a\} > 0$ y $\mathcal{R}\{b\} > 0$, y T_s es el periodo de muestreo.

(a) **Calcule la función de transferencia $H_1(z)$ y la respuesta al impulso del sistema $h_1[n]$.**

(b) **Calcule qué restricciones tiene que tener T_s para que el sistema $h_1[n]$ sea estable. (Indíquelas en función de a y b).**

(c) **Calcule $h_2[n]$ si se sabe que $y[n] = x[n]$ para cualquier entrada.**

(a) A partir de la ecuación en diferencias, calculamos su transformada Z:

$$V(z)(1+e^{-a\cdot T_s}Z^{-1}) = bX(z)$$

y de aquí

$$H_1(z) = \frac{V(z)}{X(z)} = \frac{b}{1+e^{-a\cdot T_s}Z^{-1}}.$$

Para toda transformada Z hay que dar, además de su expresión analítica, su región de convergencia. En este caso, $H_1(z)$ tiene un polo en $z = e^{-a\cdot T_s}$. Al ser causal la convergencia se dará hacia el exterior de este polo, por lo tanto, su ROC será:

$$|z| > |e^{-a\cdot T_s}|.$$

Dado que T_s es un periodo de muestreo, será un número real y positivo. a, por su parte, es un numero complejo, como lo que podemos reescribir la ROC

$$|z| > e^{-\mathcal{R}\{a\}\cdot T_s}.$$

con $\mathcal{R}\{a\}$ la parte real de a. Con $H_1(z)$ y su ROC, calcular la respuesta al impulso en tiempo es inmediato:

$$h_1[n] = be^{-a\cdot T_s\cdot n}u[n].$$

(b) Para que el sistema sea estable, la transformada Z de su respuesta al impulso debe contener la circunferencia unidad dentro de su ROC. Por lo tanto, tiene que cumplirse que

$$e^{-\mathcal{R}\{a\}\cdot T_s} < 1.$$

Dado que $\mathcal{R}\{a\} > 0$, la única condición es que $T_s > 0$.

(c) $H_2(z)$ será el sistema inverso de $H_1(z)$:

$$H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)}) = \frac{1 + e^{-a\cdot T_s} Z^{-1}}{b}.$$

De aquí:

$$h_2[n] = \frac{1}{b}\delta[n] - \frac{1}{b}e^{-a\cdot T_s}\delta[n-1]$$