Sistemas Lineales

Examen de Junio 2012

1. **(2.5 pt, convalidable con parcial)**. Considere la señal $x(t) = |\sin(\pi t)|$

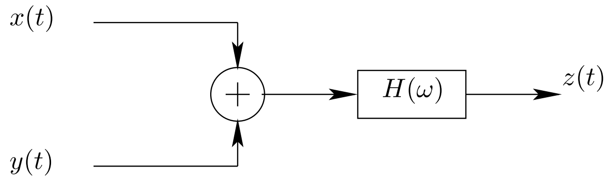
   (a) Obtenga su transformada de Fourier, $X(\omega)$, y represéntela para $|\omega| \leq 7\pi$.

   (b) Calcule la potencia y la energía de $x(t)$.

   (c) Considere el sistema de la figura inferior, donde la transformada de Fourier de la respuesta al impulso $h(t)$ es:

   $$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 5\pi \\ 0, & |\omega| > 5\pi \end{cases}$$

   Determine la salida del sistema, $z(t)$, siendo $y(t) = \frac{4}{3\pi}\cos(2\pi t)$.



2. **(3 pt.)** Responda a las siguientes cuestiones:

   (a) **(1 pt.)** Sea un sistema en tiempo continuo cuya salida $y(t)$ se obtiene a partir de la entrada $x(t)$ mediante la siguiente fórmula integral:

   $$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{6\exp(-\tau^2 + \pi\tau + \pi t)\sqrt{\frac{1/4}{1+(t-\tau)^2}}}{\exp(\pi(t-\tau)) + \exp(\pi t - \tau) + \exp(\pi(t - \pi\tau))} x(\tau) d\tau.$$

   Calcule la respuesta al impulso, $h(t)$, de dicho sistema.

   (b) **(1 pt.)** Calcule la transformada inversa de Fourier de tiempo discreto de la señal

   $$X(\Omega) = e^{-j\frac{\Omega}{3}} \quad -\pi \leq \Omega < \pi$$

   ¿Es $X(\Omega)$ una señal periódica? Justifique la respuesta.

   (c) **(1 pt.)** Calcule la transformada inversa de Fourier de tiempo continuo de la señal

   $$X(\omega) = \left[\operatorname{sinc}\left(\omega \frac{A}{\pi}\right)\right]^2$$

3. **(2 pt.)** Sea un sistema estable cuya función de transferencia es

   $$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}}$$

   (a) Calcule la respuesta al impulso del sistema

   (b) Justifique si existe o no la transformada de Fourier de la respuesta al impulso, y en caso de existir calcúlela.

   (c) Calcule la salida del sistema cuando la entrada es

   $$x[n] = 4^{n/2} e^{-j\frac{1}{7\pi}n}$$

4. **(2.5 pt.)** El proceso físico de la perfusión del Gadolíneo en los tejidos puede verse como un sistema LTI causal caracterizado por la siguiente ecuación difencial:

$$\frac{dc(t)}{dt} = K_T \cdot c_a(t) - K_e \cdot c(t)$$

donde $c_a(t)$ es la señal de entrada (concentración de Gadolíneo en la sangre), $c(t)$ es la señal de salida (concentración de Gadolíneo en un tejido) y K_T y K_e son dos constantes reales positivas (tasas de transferencia sangre-tejido, y tejido-sangre). A partir de la ecuación diferencial se pide:

(a) Calcule la respuesta al impulso del sistema $h(t)$. El sistema así definido ¿Es estable?

(b) Calcule un sistema $h_1(t)$ tal que

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

(c) Argumente si es posible muestrear sin *aliasing* $h(t)$ y $h_1(t)$ de acuerdo con el teorema de Nyquist y, si así fuera, dé el máximo periodo de muestreo para cada una de las respuestas al impulso.

(d) Se define una versión discreta de la ecuación diferencial:

$$c[n] - c[n-1] = K_T \cdot c_a[n] - K_e \cdot c[n]$$

Asumiendo que el sistema así definido sigue siendo causal, calcule $h_d[n]$ e indique si existe alguna restricción en los parámetros K_T y K_e para garantizar su estabilidad.

(e) Calcule el ratio

$$E_R = \frac{E\{h(t)\}}{E\{h_d[n]\}}$$

donde $E\{h(t)\}$ es la energía de $h(t)$ y $E\{h_d[n]\}$ es la energía de $h_d[n]$. (Asuma estabilidad en los dos sistemas).