Sistemas Lineales

Examen parcial, mayo 2012

1. **(2.5 puntos)** Sea $x(t)$ una señal pasobajo con transformada de Fourier

$$X(\omega) = \begin{cases} A^2 - \omega^2 & |\omega| \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0 & |\omega| > \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

siendo A un número real positivo, y sea un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t-n)$$

   (a) Sin calcular la transformada inversa, indique si la señal $x(t)$ cumple alguna de las siguientes propiedades: par, impar, real pura, imaginaria pura, hermítica, antihermítica o periódica. Explique si $x(t)$ será una señal de potencia o de energía.

   (b) Estudie las siguientes propiedades del sistema: Memoria, causalidad, estabilidad, linealidad e invarianza temporal.

   (c) Calcule la salida $y(t)$ para la entrada $x(t)$.

Propiedad	**Señal periódica**	**Coef. Serie de Fourier**
	$\left.\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array}\right\}$ Periodo T $(\omega_0 = \frac{2\pi}{T})$	a_k b_k
Linealidad	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Desplazamiento temporal	$x(t-t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{jM\omega_0 t}x(t)$	a_{k-M}
Conjugación	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Escalado temporal	$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$ Periódica con periodo T/α	a_k
Convolución Periódica	$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$Ta_k b_k$
Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
Diferenciación	$\frac{d}{dt}x(t)$	$jk\omega_0 a_k$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ (Finita y periódica sólo si $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right) a_k$
Simetría Conjugada	$x(t)$ real	$a_k = a^*_{-k}$

Relación de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

Table 1: Propiedades de la Serie Continua de Fourier

Señal	**Transformada de Fourier**	**Coef. serie de Fourier (si es periódica)**
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_o)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0 \quad k \neq 1$
$\cos\omega_0 t$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0,$ con otro valor
$\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0,$ con otro valor
1	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0 = 1$ $a_k = 0 \quad k \neq 0$
Onda cuadrada periódica $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ $x(t+T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} = \frac{\omega_0 T_1}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ para todo k
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$	-
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 0, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$	-
$\delta(t)$	1	-
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	-
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	-
$e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$	-
$te^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	-
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$	-

Table 2: Pares Básicos de Transformadas de Fourier

Propiedad	**Señal Aperiódica**	**Transformada de Fourier**
Linealidad	$ax(t)+by(t)$	$aX(\omega)+bY(\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega-\omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Inversión temporal	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Escalado	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Convolución	$x(t)*y(t)$	$X(\omega)Y(\omega)$
Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega)*Y(\omega)$
Diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$
Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$

Relación de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2 d\omega$$

Table 3: Propiedades de la Transformada de Fourier