Sistemas Lineales

Examen de Febrero 2006. Soluciones

1. **(2.5 pt.)** Como paso previo hay que calcular la transformada de Fourier de la señal $g(t)$. Si definimos

$$g_1(t) = \text{sinc}(Wt) = \frac{1}{W}\frac{\sin(W\pi t)}{\pi t}$$

entonces

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} G_1(\omega) * G_1(\omega)$$

La transformada de Fourier de $g_1(t)$ es un pulso cuadrado entre $[-\pi W, \pi W]$ de altura $1/W$. Por lo tanto la transformada de $g(t)$ será un pulso triangular entre $[-2\pi W, 2\pi W]$ y con altura $1/W$ en el origen, tal como se muestra en la figura 1.

   (a) **(0.5 pt.)** Según el teorema de Nyquist la mínima frecuancia de muestreo es

$$\omega_{s_{\min}} = 2\omega_M$$

   siendo ω_M la máxima frecuencia de la señal. Por lo tanto en este ejercicio $\omega_{s_{\min}} = 4\pi W$ de donde

$$T_{s_{\max}} = \frac{2\pi}{\omega_{s_{\min}}} = \frac{1}{2W}$$

   (b) **(1 pt.)** Tal y como aparecen en la figura 1.

   (c) **(0.5 pt.)** Según Parseval podemos definir la energía de la señal continua en el dominio de la frecuencia

$$E_C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G_c(\omega)|^2 d\omega$$

   Siendo $G_c(\omega)$ la Transformada de Fourier de la señal continua. La de la señal discreta será

$$E_D = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |G(\Omega)|^2 d\Omega$$

   Si hago el cambio de variable $\Omega = \omega T_s$

$$\begin{aligned} E_D &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |G(\Omega)|^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} |G(\omega T_s)|^2 T d\omega \end{aligned}$$

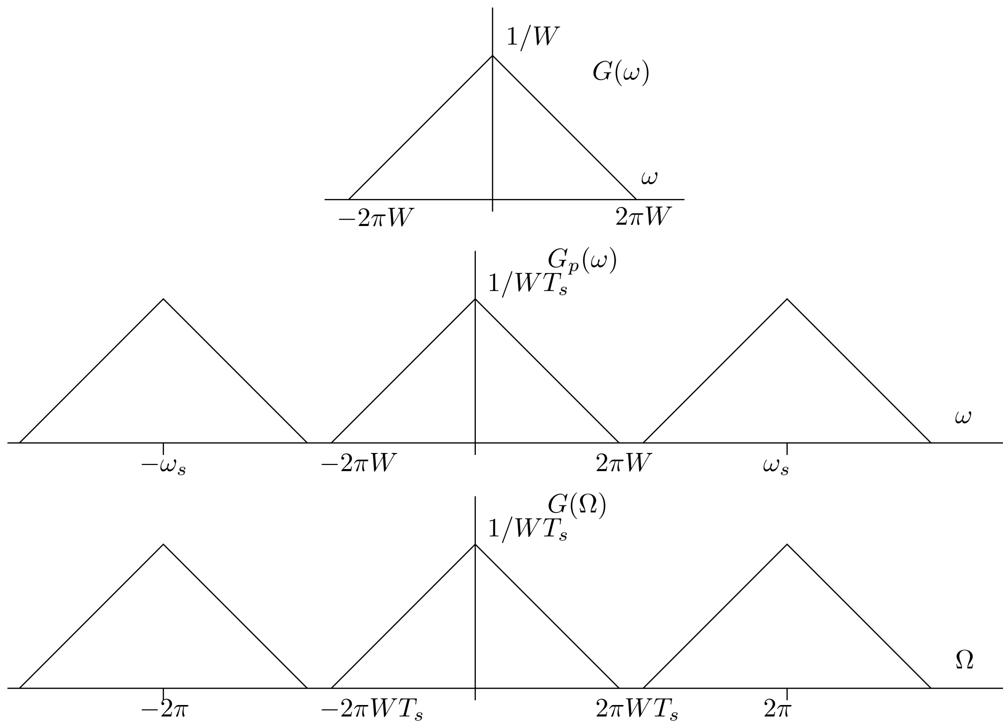

Figure 1: Transformada de Fourier de $g(t)$, $g_p(t)$ y $g[n]$. Problema 1.

Nótese que $G(\omega T_s)$ va a ser equivalente a lo que antes hemos llamado $G_p(\omega)$:

$$\begin{aligned}
E_D &= \frac{T_s}{2\pi}\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} |G_p(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{T_s}{2\pi}\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \frac{1}{T_s^2}|G_c(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{T_s}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G_c(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{T_s}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G_c(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{T_s}E_C
\end{aligned}$$

Luego la relación es

$$E_D = \frac{1}{T_s}E_C$$

NOTA: Puede llegarse a la misma relación por caminos erróneos y con razonamientos incompletos, la mayoría de las veces por pura casualidad. Por ejemplo no es correcto:

- Argumentar que $\int_{-\infty}^{\infty} |G_c(\omega)|^2 d\omega$ es el área de la señal $G(\omega)$ al cuadrado.

Realmente es el área del cuadrado de la señal (que no es lo mismo):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_c(\omega)|^2 d\omega \neq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |G_c(\omega)| d\omega \right)^2$$

- Argumentar que como $G_c(\omega)$ y $G(\Omega)$ tienen la misma forma salvo un escalado por T_s, su energía estará también escalada T_s. Nótese que la energía depende de la señal al cuadrado.

(d) **(0.5 pt.)** El filtro de recontrucción será un filtro pasobajo de ganancia $T_s = \frac{1}{2W}$ y frecuencia de corte $\frac{\omega_s}{2} = 2\pi W$, lo que da lugar a

$$h(t) = \text{sinc}(2Wt)$$

(Nótese que para un proceso de muestreo con un tren de deltas equiespaciado la sinc ha de tener siempre altura 1).

2. **(2.5 pt.)**

(a) **(1 pt.)** Si una señal es causal podemos escribirla

$$f[n] = f[n]\ u[n]$$

Por otro lado, para que el sistema modelado por una ecuación en diferencias sea LTI debe tener como condiciones de contorno reposo inicial o final. En el primer caso, $h[n]$ es causal, en el segundo anticausal. En el enunciado se nos dice que supongamos reposo incial, por lo que implícitamente se indica que $h[n]$ es causal:

$$h[n] = h[n]\ u[n]$$

La salida del sistema será la convolución discreta:

$$\begin{aligned} y[n] &= f[n] * h[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\ h[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\ u[k]\ h[n-k]\ u[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f[k]\ h[n-k]\ u[n-k] \end{aligned}$$

La señal $u[n-k]$ será de la forma

$$u[n-k] = \begin{cases} 1 & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

y al sustituir en el sumatorio

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} f[k]\ h[n-k] & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

(b) **(0.75 pt.)** Del enunciado se puede ver que $y[n]$ es una señal causal, y por lo tanto es una secuencia derecha. De acuerdo con las propiedades de las regiones de convergencia: "Si $x[n]$ es una secuencia derecha y el círculo $|z| = r_0$ está en la ROC de $X(z)$, entonces todos los valores finitos de z para los cuales $|z| > r_0$ también estarán en la ROC." Por lo tanto $Y(z)$ convergerá hacia el exterior de una circunferencia en el plano z centrada en el origen.

(c) **(0.75 pt.)** $h[n]$ ya es causal.

$$h[n] = 0 \ \forall n < 0$$

Para que el sistema sea estable

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Al ser causal, podemos reescribir esta propiedad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

NOTA: Hay otras formas de dar solución a los apartados b) y c). Por ser soluciones inmediatas (prácticamente copiar teoría) se exige cierta rigurosidad en los planteamientos y se penalizan incorrecciones básicas. Algunos comentarios:

- Cuando se habla de región de convergencia (ROC), es la ROC de $H(z)$, no de $h[n]$. La ROC está asociada a una transformada Z.
- Cuando se habla de los polos como delimitadores de la ROC, son los polos de $H(z)$ o de $Y(z)$, pero no de $h[n]$ o de $y[n]$. Los polos están asociados a funciones, y una señal y su transformada son funciones distintas.
- Cuando hablamos de *secuencias derechas* nos referimos siempre a señales discretas, como $h[n]$. $H(z)$ no podrá ser nunca una secuencia derecha, ya que ni siquiera es una secuencia (es continua). Tampoco la ROC de $H(z)$ será derecha, ya que la ROC tiene forma de anillo.
- El criterio de estabilidad lleva a que polos de $H(z)$ tengan su *módulo* menor que 1. No es lo mismo que decir que los polos tienen que ser menores que uno.
- Una señal discreta causal es una secuencia derecha, pero una secuencia derecha no tiene por qué ser una señal causal. (Por ejemplo $u[n+3]$).
- Si se indica una ROC mediante una gráfica, hay que indicar qué es lo que se representa: ejes, espacio... (No basta con hacer un círculo e indicar "esto es la ROC").

3. **(2.5 pt.)**

(a) **(1.25 pt.)** La forma más sencilla de realizar el problema es darse cuanta de que tenemos

$$y(t) = x(t) * e^{j\omega_0 t}$$

es decir, la convolución de $x(t)$ con una autofunción, con lo que la solución será

$$y(t) = X(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

siendo $X(\omega_0)$ la transformada de Fourier de $x(t)$ evaluada en ω_0

$$y(t) = e^{j\omega_0 t}\frac{2\sin\omega_0 0.5}{\omega_0}$$

Si realizamos la convolución, se llega al mismo resultado:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\ d\tau \\ &= \int_{-0.5}^{0.5} h(t-\tau)\ d\tau \\ &= \int_{-0.5}^{0.5} e^{j\omega_0(t-\tau)}\ d\tau \\ &= e^{j\omega_0 t}\frac{2\sin\omega_0 0.5}{\omega_0} \end{aligned}$$

Como se pide que $y(0) = 0$ la única posibilidad es que

$$\frac{2\sin\omega_0 0.5}{\omega_0} = 0$$

Nótese que esta función es una sinc. Se hace cero en los valores que anulan el seno excepto en el origen:

$$\omega_0 = 2\pi k\ k \in \mathcal{Z},\ k \neq 0$$

(b) **(1.25 pt.)** Como ya se ha indicado en el apartado anterior, la salida del sistema para una entrada $x(t)$ será

$$y(t) = X(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

Se puede demostrar:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\ d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j\omega_0(t-\tau)}\ d\tau \\ &= e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega_0\tau}\ d\tau \\ &= e^{j\omega_0 t}X(\omega_0) \end{aligned}$$

La señal así descrita es una señal periódica, ya escrita como serie de Fourier con

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$a_k = \begin{cases} X(\omega_0) & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$$

Si $X(\omega_0) = 0$ la salida será nula.

4. **(2.5 pt.)**

(a) **(1 pt.)** La manera más sencilla es estudiarlo usando la Transformada de Laplace de cada bloque:

$$H_1(s) = \frac{1}{s+2} \ \Re\{s\} > -2$$
$$H_2(s) = \frac{1}{s+2} \ \Re\{s\} > -2$$
$$H_3(s) = \frac{1}{s+1} \ \Re\{s\} > -1$$
$$H_4(s) = 1 \ \forall s$$
$$H_5(s) = \frac{1}{s+3} \ \Re\{s\} > -3$$

El sistema global tendrá por respuesta al impulso

$$H(s) = (H_1(s) + H_2(s)H_3(s) + H_4(s))H_5(s)$$

Según las propiedades de la T. de Laplace, la región de convergencia de una combinación lineal de señales es por lo menos la intersección de sus regiones de convergencia. Lo mismo ocurre para una convolución en tiempo (multiplicación en dominio de Laplace). Por lo tanto, la ROC de $H(s)$ será al menos $R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5$ que resulta ser

$$ROC \supset \Re\{s\} > -1$$

Por lo tanto, el eje $j\omega$ (o visto de otro modo $\Re\{s\} = 0$) está contenido dentro de la ROC y el sistema es estable.

De aquí se deduce también que si cada bloque es estable, el sistema global va a ser estable (en la intersección de sus ROC estará siempre el eje $j\omega$.

Otra forma de probar la estabilidad sería calcular la $h(t)$ global y demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

(b) **(1.5 pt.)** La función de transferencia de un sistema continuo es la transformada de Laplace de su respuesta al impulso:

$$H(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+3} \quad \Re\{s\} > -1$$

(Es necesario dar conjuntamente la expresión y su región de convergencia.) La respuesta al impulso será:

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-t}u(t)$$