Sistemas Lineales

Examen de Junio 2009

1. **Calcule la transformada de Fourier de $x(t) = |\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)|$. Dibújela para el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.**

   La señal que nos dan es una señal peridica de periodo $T = 3/2$, de la que un periodo se define como:

   $$x(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \qquad -3/4 \leq t \leq 3/4$$

   Su transforada de Fourier será de la forma:

   $$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right)$$

   con c_k los coeficientes de la serie de Fourier:

   $$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{3}\int_{-3/4}^{3/4} \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) e^{-jk\frac{4\pi}{3}t} dt \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-2k)\right)}{\pi(1-2k)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1+2k)\right)}{\pi(1+2k)} \\ &= \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{1-2k}{2}\right) + \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{1+2k}{2}\right) \end{aligned}$$

   Con lo que

   $$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\left(\text{sinc}\left(\frac{1-2k}{2}\right) + \text{sinc}\left(\frac{1+2k}{2}\right)\right)\delta\left(\omega - \frac{4\pi}{3}k\right).$$

   Entre -2π y 2π quedarán únicamente 3 deltas:

   $$X(\omega) = 4\delta(\omega) + \frac{4}{3}\delta\left(\omega - \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{4}{3}\delta\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right)$$

   NOTA: Nótese que

   $$\left|\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\right| \neq \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)u(t) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)u(-t)$$

   El haber supuesto lo anterior, supone tener todo el ejercicio mal.

2. **Sea una señal $x(t)$ tal que su transformada de Fourier $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$. La señal $x(t)$ se multiplica por una señal periódica genérica de periodo T. Demuestre que $x(t)$ podrá ser recuperada con un filtro pasobajo. Especifique las restricciones de T y del filtro de reconstrucción.**

   Una señal periódica $m(t)$ puede escribirse siempre como una serie de Fourier:

   $$m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

   con transformada de Fourier

   $$M(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right)$$

Si multiplico una señal con una señal periódica

$$y(t) = x(t)m(t)$$

su transformada de Fourier es la convolución:

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi}X(\omega) * M(\omega) \\
&= \frac{1}{2\pi}X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k X(\omega) * \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k X\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right)
\end{aligned}$$

De este modo, la transformada de Fourier será la señal duplicada en múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{T}k$ y cada réplica multiplicada por c_k.

Asumiendo que $c_0 \neq 0$, la señal se podrá recuperar si no hay solapamiento entre répiclas, lo que lleva a un criterio similar al de Nyquist: $\frac{2\pi}{T} > 2\omega_M$, con lo que

$$T < \frac{\pi}{\omega_M}$$

La reconstrucción se realizará con un filtro pasobajo con frecuencia de corte $\omega_c = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{T}$ y ganancia $\frac{1}{c_0}$, asumiendo que $c_0 \neq 0$

NOTA: Una señal periódica genérica no es un tren de deltas de la forma $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{2\pi}{T}k\right)$. El tren de deltas es un caso particular, que coincide con el caso de muestreo visto en clase. No es lo que se pedía en este apartado.

3. **El operador *media local* de una secuencia discreta se define**

$$\langle x[n] \rangle_n = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} x[n+k]$$

   (a) **Calcule y dibuje la respuesta al impulso del sistema $y[n] = \langle x[n] \rangle_n$. Escríbala utilizando funciones escalón.**

   (b) **Estudie la linealidad, invarianza temporal, estabilidad, memoria y causalidad del sistema.**

   (c) **Calcule la función de transferencia del sistema, $H(z)$. (Dé la región de convergencia).**

   (d) **Se define la varianza local como**

$$V[n] = \langle (x[n])^2 \rangle_n - (\langle x[n] \rangle_n)^2$$

   Calcule la transformada de Fourier de $V[n]$ en función de la transformada de Fourier de $x[n]$.

0.75 puntos cada apartado.

(a) La respuesta al impulso de un sistema se define como la salida del sistema cuando a la entrada hay una delta (impulso). En este caso

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\delta[n+k] \\ &= \frac{1}{2N+1}\left(u[n+N]-u[n-(N+1)]\right) \end{aligned}$$

(b) El sistema es un LTI, pero para usar las propiedades de los sistemas LTI antes hay que probar la linealidad y la invarianza. El sistema va a ser Lineal, invariante, estable, con memoria, no causal. Es necesario demostrar cada propiedad, no basta con citarla.

(c) La transformada Z de $h[h]$ será

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\delta[n+k]\right\} \\ &= \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}z^{-k} \\ &= \frac{1}{2N+1}\left(z^{N}+z^{N+1}+\cdots+z^{-N-1}z^{-N}\right) \end{aligned}$$

con región de convergencia ROC= $\mathcal{Z}-\{0\}-\{\infty\}$. Nótese que la señal $h[n]$ es limitada, por lo que su región de convergencia será todo el plano complejo (más menos cero e infinito). Otras representaciones de la TZ serán:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}z^{-k} \\ &= \frac{1}{2N+1}\left(\frac{1-z^{-N-1}}{1-z^{-1}}+\frac{z-z^{N+1}}{1-z}\right) \\ H(z) &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2N+1}\left(u[n+N]-u[n-(N+1)]\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2N+1}\frac{1}{1-z^{-1}}\left(z^{N}-z^{-N-1}\right) \end{aligned}$$

(d) Dos posibles formas de hacerlo:

i. Considerando el sistema lineal. En este caso

$$\begin{aligned} v[n] &= h[n]*x[n]^2-(h[n]*x[n])^2 \\ V(\Omega) &= H(\Omega)(X(\Omega)\circledast X(\Omega))-(H(\Omega)X(\Omega))\circledast(H(\Omega)X(\Omega)) \end{aligned}$$

con

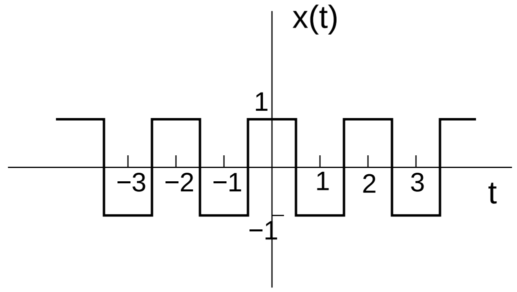
$$H(\Omega)=\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}e^{jk\Omega}.$$

ii. Considerando la relación entrada–salida:

$$v[n] = \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}x[n+k]^2-\left(\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}x[n+k]\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
V(\Omega) &= \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\left(X(\Omega)e^{jk\Omega}\right)\circledast\left(X(\Omega)e^{jk\Omega}\right)\\
&= -\left(\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}X(\Omega)e^{jk\Omega}\right)\circledast\left(\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}X(\Omega)e^{jk\Omega}\right)
\end{aligned}
$$

4. **Sea la señal $x(t)$:**



y el sistema con respuesta al impulso

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \textbf{resto} \end{cases}$$

(a) Calcule la convolución $y(t) = x(t) * h(t)$.

(b) Calcule la parte par y la parte impar de $x(t)$.

(c) Calcule la potencia instantánea de $x(t)$, su energía, su valor de pico, su valor medio y su potencia media.

(d) Dibuje $h\left(\frac{7t-3}{5}+2\right)$.

(a) **1 pt.** Para hacer la convolución la manera más sencilla es considerar la convolución de dos pulsos cuadrados. Si escribimos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k m(t-k)$$

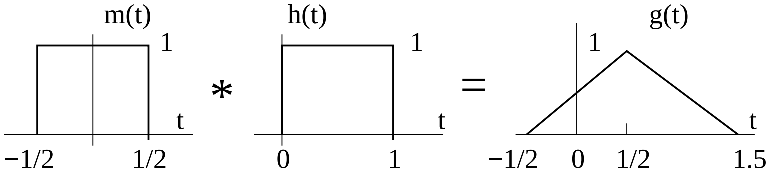
con

$$m(t) = \begin{cases} 1 & -1/2 \le t \le 1/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

la convlución será:

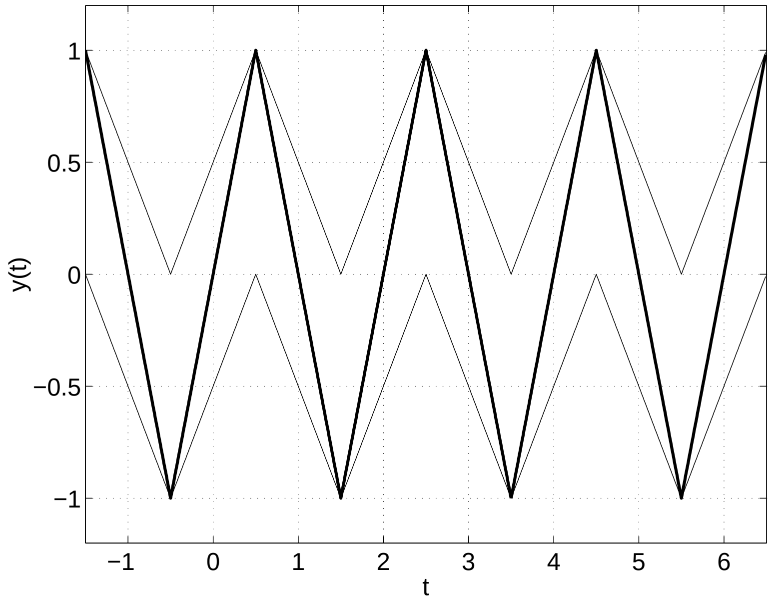
$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k m(t-k) * h(t).$$

La convolución $g(t) = m(t) * h(t)$ será: con lo que la convolución será



$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k g(t-k).$$

Va a existir un solapamiento entre lod $g(t-k)$, del siguiente modo:



(b) **0.6 pt.** La señal es una señal par, por lo tanto $x_e(t) = x(t)$ y $x_o(t) = 0$.

(c) **0.8 pt.**

$$\begin{aligned} P_i(t) &= |x(t)|^2 = 1 \\ E_\infty &= \int_{-\infty}^{\infty} P_i(t)dt = \infty \\ x_p &= \max\{|x(t)|\} = 1 \\ ax_{AV} &= \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)dt = 0 \\ P_{AV} &= \frac{1}{T}\int_{<T>} P_i(t)dt = 1 \end{aligned}$$

(d) **0.6 pt.**

$$h\left(\frac{7t-3}{5}+2\right) = h\left(\frac{7}{5}t+\frac{7}{5}\right)$$