Sistemas Lineales

Examen de Septiembre 2006. Soluciones

1. **(2 pt.)** Cada apartado vale 0.66 pt.

   (a) Si $x(t)$ es impar se cumple que

   $$x(t) = -x(-t)$$

   La integral que nos dan podemos escribirla (suponiendo que no tenemos singularidades en el origen) como

   $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt &= \int_{-\infty}^{0} x(t)dt + \int_{0}^{\infty} x(t)dt \\ &= \int_{0}^{\infty} x(-t)dt + \int_{0}^{\infty} x(t)dt\end{aligned}$$

   y aplicando la propiedad de que la señal es impar

   $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt &= -\int_{0}^{\infty} x(t)dt + \int_{0}^{\infty} x(t)dt \\ &= \int_{0}^{\infty} (x(t) - x(t))dt = 0\end{aligned}$$

   q.e.d.
   Otras demostraciones similares son también aceptables.

   (b) Llamemos $x_3(t) = x_1(t)x_2(t)$. Por ser impar $x_1(t) = -x_1(-t)$ y por ser par $x_2(t) = x_2(-t)$, por lo que

   $$x_3(t) = x_1(t)x_2(t) = -x_1(-t)x_2(-t) = -x_3(-t)$$

   Por ser $x_3(t) = -x_3(-t)$ la señal es impar.
   NOTA: Hay quien ha intentado resolver este apartado utilizando la solución del apartado anterior. Es decir, ha intentado demostrar que si la integral de $x_1(t)x_2(t)$ es cero, la señal es impar. Este razonamiento no es correcto. Nótese, que si bien toda señal impar $x(t)$ cumple que $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 0$, no todas las señales que cumplen que $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 0$ son impares. Por lo tanto, que la integral de una señal sea nula no implica que la señal sea impar.

   (c) Dado que toda señal se puede escribir como suma de su parte par e impar $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ se cumple que

   $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_e(t) + x_o(t)\right)^2(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)dt + 2\int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)x_o(t)dt\end{aligned}$$

La señal $x_e(t)x_o(t)$ es el producto de una señal par por una impar, y de acuerdo con el apartado (b) esta señal es impar. De acuerdo con el apartado (a) la integral de una señal impar es cero, por lo que este término es nulo. Las señales $x_e^2(t)$ y $x_o^2(t)$ a su vez, son pares, por lo que su integral no tiene por que ser nula. Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)dt$$

2. **(2 pt.)** Lo primero que hay que tener en cuenta es que al decirnos que el sistema es estable, el círculo unidad debe pertenecer a la ROC. Por lo tanto, la ROC de $H(z)$ tiene que ser $|z| > 1/2$. La señal que nos dan se puede escribir de la siguiente forma

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]$$

La salida será la convolución $x[n] * h[n]$. Hay varias maneras de realizarlo. Dado que el resultado va a ser una señal discreta, las funciones pueden parecer distintas, aunque en el fondo sean las mismas:

(a) Trabajando en el dominio Z. Para ello calculamos la transformada Z de $x[n]$:

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}} \quad 2 > |z| > 1/2$$

La solución será el producto:

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z)H(z) \\ &= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}}\right)\frac{4z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \\ &= \frac{4z}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} - \frac{4z}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \\ &= \frac{4z}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} - \frac{4z}{3}\left(\frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{4}{1-2z^{-1}}\right) \end{aligned}$$

Nótese que multiplicar una señal $M(z)$ por z^{n_0} en el dominio Z es equivalente a desplazar la señal en tiempo $m[n+n_0]$. Haciendo las transformadas inversas (teniendo en cuenta que $2 > |z| > 1/2$) obtenemos

$$y[n] = 8(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} u[n+2] + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] + \frac{16}{3}(2)^{n+1} u[-n-2]$$

(b) Si se trabaja en el dominio temporal, la respuesta al impulso del sistema sería

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1]$$

Con lo que la convolución sería

$$\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * h[n] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} u[k] 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} u[n-k+1] + \\
&+ \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} u[-k-1] 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} u[n-k+1] \\
&= \sum_{k=0}^{k=\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} u[n-k+1] + \\
&+ \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} u[n-k+1]
\end{aligned}$$

Con lo que quedaría

$$y[n] = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k+1} 4 & n < -1 \\ \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 4 \sum\limits_{k=0}^{n+1} 1 + \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k+1} 4 & n \geq -1 \end{cases}$$

Y tras operar se llega a que

$$y[n] = 4(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] + \frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1} u[-n-2]$$

COMENTARIOS:

- Hay que tener cuidado al hacer una expansión en fracciones simples. Si tenemos una expresión de la forma

$$\frac{z}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}$$

nunca se podrá hacer una expansión de la forma

$$\frac{A}{(1-az^{-1})} + \frac{B}{(1-bz^{-1})}$$

ya que el producto de exponenciales z^{-1} nunca podrá ser z.

- Cuando hablamos de autosoluciones de un sistema LTI, hablamos de funciones de la forma z_0^n, no de funciones de la forma $z_0^n u[n]$. Puede comprobarse facilmente que esta última no es autosolución.
- Cuando se habla de estabilidad de un sistema, hay que estudiarla sobre $H(z)$, que es la función de transferencia del sistema, no sobre $X(z)$ que es la TZ de la señal de entrada. La estabilidad es una característica del sistema, y no de sus entradas.

- En este caso, el criterio de estabilidad coincide con el de causalidad, pero que un sistema sea causal no implica que sea estable.

3. **(2 pt.)** 0.33 pt. cada propiedad:

Memoria Dado que la salida depende de la entrada en el mismo instante de tiempo, el sistema es sin memoria

$$y(t_0) = f(x(t_0))$$

Causalidad: Por ser sin memoria, el sistema es causal.

Linealidad: El sistema no va a ser lineal. Para que sea lineal se tiene que cumplir que

$$T\left[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\right] = \alpha T\left[x_1(t)\right] + \beta T\left[x_2(t)\right]$$

En nuestro caso

$$u\left(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\right) \neq \alpha u\left(x_1(t)\right) + \beta u\left(x_2(t)\right)$$

por lo que el sistema no es lineal.

Estabilidad: La salida del sistema siempre va a estar acotada, independientemente del valor de $x(t)$, ya que la señal $u(t)$ está acotada entre $[0, 1]$.

Invarianza temporal: El sistema es invariante si cuando la entrada se desplaza un valor t_0 la salida se desplaza el mismo valor. Si la entrada es $x(t - t_0)$ la salida será $u(x(t - t_0)) = y(t - t_0)$, con lo que el sistema es invariante.

Invertibilidad: El sistema no es invertible, ya que distintos valores de $x(t)$ tienen el mismo valor de salida (la relación no es unívoca), con lo que no se podrá recuperar la señal original.

COMENTARIOS:

- Mucha gente ha evaluado las propiedades como si se tratara de un sistema LTI. Claramente, no es un LTI, y lo que es más, en el enunciado se da una relación entrada salida, no una $h(t)$. No se pedía estudiar un sistema con $h(t) = u(t)$.
- Es necesario justificar las respuestas, y a ser posible demostrarlas.

4. **(2 pt.)** El siguiente problema es muy similar a uno visto en clase en las hojas de ampliación. Consiste básicamente en un muestreo en el dominio de la frecuencia que tiene como resultado que en el tiempo aparece uan señal periódica. (Visto de otra manera, la transformada de Fourier de una señal periódica es un tren de deltas).

En frecuencia tenemos la señal

$$\begin{aligned} X_p(\omega) &= X(\omega)P(\omega) \\ &= X(\omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - kW) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}X(kW)\delta(\omega - kW) \end{aligned}$$

Es decir, aparece la señal $X(\omega)$ muestreada. En tiempo, la multiplicación es una convolución

$$\begin{aligned} x_p(t) &= x(t) * p(t) \\ &= x(t) * \frac{1}{W} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - k\frac{2\pi}{W}\right) \\ &= \frac{1}{W} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(t - k\frac{2\pi}{W}\right) \end{aligned}$$

Con lo que lo que tenemos es la señal escalada y replicada en múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{W}$, es decir una señal periódica. Si hubiéramos calculado de otro modo la transformada inversa de $X_p(\omega)$, tendríamos

$$x_p(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kW) e^{jkWt}$$

En este caso, vemos que es una serie de Fourier con periodo $T = \frac{2\pi}{W}$. Es fácil ver también que la señal aperiódica (es decir, un periodo de señal) coincide con $x(t)$, con lo que llegamos a la misma solución que anteriormente.

5. **(2 pt.)** Lo que se está pidiendo en el problema es que se haga la serie de Fourier de la señal $x(t)$. Por ser una señal real, la voy a poder poner además como una suma de senos y cosenos de la forma:

$$x(t) = C_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + 2\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

donde a_k es la parte real de los coeficientes de la serie de Fourier c_k y b_k su parte imaginaria.

Si calculamos los coeficientes

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) e^{-jtk} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} e^{-jtk} dt \\ &= \vdots \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi(1+k^2)} \quad k \neq \pm 1 \end{aligned}$$

Para $k = \pm 1$ la solución es $c_k = 1/4$. Dado que los c_k son reales, $a_k = c_k$, con lo que

$$x(t) = \frac{1}{\pi} + 2\sum_{k=-1}^{\infty} c_k \cos(kt)$$

COMENTARIOS:

- Se pueden calcular también los coeficientes a partir de la Transformada de Fourier de la señal aperiódica. Si vemos esta señal como un coseno multiplicado por un pulso rectangular, su TF será:

$$X_a(\omega) = \frac{\sin(\omega - 1)\pi/2}{\omega - 1} + \frac{\sin(\omega + 1)\pi/2}{\omega + 1}$$

- Es necesario estudiar a parte las singularidades (en este caso $k = \pm 1$).
- Se han tenido en cuenta aquellas soluciones en que se ha dividido la exponencial en una suma de seno y coseno, en lugar de usar lo expuesto en la teoría. Sin embargo, estas soluciones llevan a escribir una señal real en función de j, lo que no siempre es deseable.