

SISTEMAS LINEALES
PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN

1. Determine si los siguientes sistemas son lineales, invariantes en el tiempo, con memoria o causales:

- (a) $y(t) = x(t)$
- (b) $y(t) = x^2(t)$
- (c) $y(t) = x(t - T), T > 0$
- (d) $y(t) = x(t + T), T > 0$
- (e) $y(t) = \frac{dx}{dt}$
- (f) $y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau, T > 0$
- (g) $\frac{dy}{dt} + ay(t) = x(t)$ (circuito eléctrico)
- (h) $y(t) = x(t - T(t)), T(t) \geq 0$ (Modulación de fase).
- (i) $y(t) = x(t - T(t)), T(t)$ arbitrario

2. Un sistema representado por una caja negra ha de ser examinado para determinar si es lineal e invariante con el tiempo. Se realizan tres medidas que proporcionan los siguientes datos:

- (a) La señal de entrada $x_1(t)$ proporciona la señal de salida $y_1(t)$.
- (b) La señal de entrada $x_2(t)$ proporciona la señal de salida $y_2(t)$.
- (c) La señal de entrada $x_3(t) = x_1(t - T) + x_2(t - T)$ proporciona la señal de salida $y_3(t) \neq y_1(t - T) + y_2(t - T)$.

3. Determine si los siguientes pares entrada-salida corresponden a sistemas LTI:

- (a) $x(t) = \sin(\omega t), y(t) = 5 \cos(\omega t + \pi/5)$
- (b) $x(t) = \frac{1}{4} \sin(10t), y(t) = \cos(5t)$
- (c) $x(t) = e^{-t}, y(t) = \frac{1}{2} e^{-2t}$
- (d) $x(t) = e^{-2jt}, y(t) = -5 \cos(2t)$
- (e) $x(t) = -5 \cos(2t), y(t) = e^{-j2t}$

4. Calcule las siguientes expresiones:

- (a) $f_a = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \delta(t) dt$
- (b) $f_b = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \delta(t - \tau) dt$
- (c) $f_c = \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 - 2) \delta(t) dt$
- (d) $f_d = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \delta(2t) dt$

5. Calcule la transformada de Fourier de $x(y) = \frac{1}{t-a}$ usando la integral de Fourier.

6. Calcule la transformada de Fourier de $x(t) = \text{sinc}(10(t + T))$ y para $T = 0.2$ dibuje:

- (a) $|X(\omega)|$ y $\arg\{X(\omega)\}$

(b) $\text{Re}\{X(\omega)\}$ e $\text{Im}\{X(\omega)\}$

7. Calcule las funciones temporales que dan lugar a las siguientes transformadas de Fourier:

(a) $X_1(\omega) = \frac{5j\omega+5}{j\omega^2+2j\omega+17}$

(b) $X_2(\omega) = \frac{\sin(2\omega)}{2\omega}$

(c) $X_3(\omega) = \left(\frac{\sin(2\omega)}{2\omega}\right)^2$

8. Calcule la transformada de Fourier de un pulso triangular de altura 1 y anchura $2T$:

(a) usando la propiedad de diferenciación de la transformada de Fourier.

(b) multiplicando las transformadas de Fourier de las funciones rectangulares adecuadas (la convolución de dos funciones rectangulares es una función triangular).

9. Calcule el desarrollo en Series de Fourier de las siguientes señales:

(a) $x_1(t) = \cos(3\omega_0 t) \times \sin^2(2\omega_0 t)$

(b) $x_2(t) = \cos^5(2\omega_0 t) \times \sin(\omega_0 t)$

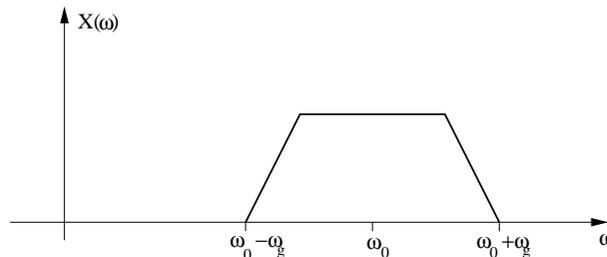
(c) $x_3(t) = \sin^4(3\omega_0 t) \times \cos^2(\omega_0 t)$

10. Una señal $x(t) = \frac{\omega_g}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega_g t}{2\pi}\right)$ se muestrea con puntos equidistantes en el tiempo nT , $n \in \mathbf{Z}$, para formar una señal $x_A(t)$.

(a) Calcule el espectro $X(\omega)$.

(b) Calcule el espectro de la señal muestreada $X_A(\omega)$. Dibújelo para $T = \frac{2\pi}{3\omega_g}$.

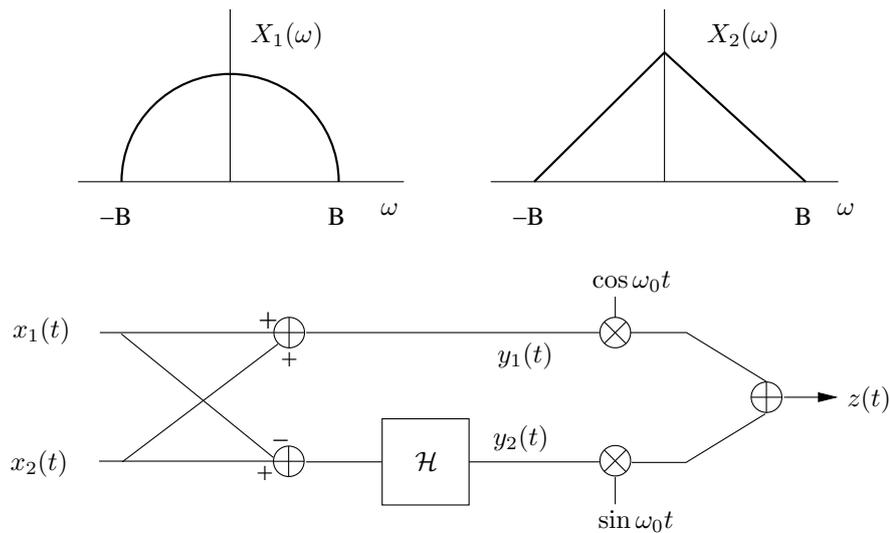
11. El espectro de una señal $X(\omega)$ aparece a continuación



(a) ¿Es $x(t)$ una función real? ¿Qué clase de simetría tiene $x(t)$?

(b) La señal $x_a(t)$ se crea a partir de un muestreo de $x(t)$ a la frecuencia de Nyquist. Dé la frecuencia de muestreo ω_s y el periodo de muestreo T_s para este caso. Dibuje $X_a(\omega)$ para $\omega_0 = 9\pi$ y para $\omega_g = 2\pi$.

(c) Dibuje $X_a(\omega)$ cuando se muestrea con una $\omega_s = 3\omega_g$.



12. Considere el diagrama de bloques de la figura, donde el bloque “ \mathcal{H} ” es un transformador de Hilbert de respuesta al impulso

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega) = -j \operatorname{sign} \omega$$

Para las señales de entrada representadas en las figuras:

- Represente gráficamente la transformada de Fourier de $z(t)$.
 - Proponga un esquema para recuperar $x_1(t)$ y $x_2(t)$ a partir de $z(t)$.
13. Compruebe si los siguientes sistemas son lineales e invariantes con el tiempo:
- $y[n] = ax[n]$
 - $y[n] = x[n - 5]$
 - $y[n] = a + x[n]$
 - $y[n] = a^n x[n]$
 - $y[n] = x[n] - x[n - 1]$
 - $y[n] = \sum_{k=0}^n x[k]$
 - $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$
 - $y[n] = c \cdot y[n - 1] + x[n]$
 - $y[n] = \frac{1}{n} x[n]$
 - $y[n] = a^{x[n]}$

14. Resuelva el siguiente problema de forma numérica para $n \in [0; 3]$

$$y[n] + y[n - 2] = x[n]$$

con condiciones iniciales

$$y[0] = 0$$

$$y[1] = 5$$

y excitación $x[n] = (-1)^n u[n]$

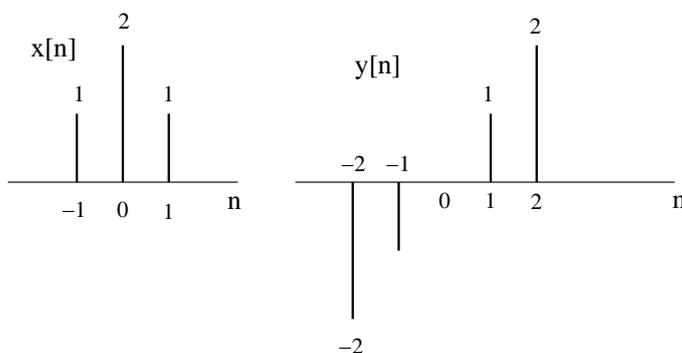
15. Sea $x_1(t)$ un pulso rectangular de altura 1 y definido entre $[-1, 1]$, y $x_2(t) = e^{-t}u(t)$.

(a) Calcule $y_1(t) = x_1(t) * x_2(t)$.

(b) Calcule la respuesta al impulso de un sistema LTI tal que cuando $x_1(t)$ es la entrada, la salida es $\frac{dy_1(t)}{dt}$

(c) Representar $y_2(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ jX_1(2\omega) * \left(\frac{dX_2(\omega)}{d\omega} e^{j\omega} \right) \right\}$

16. Sean $x[n]$ e $y[n]$ las señales siguientes



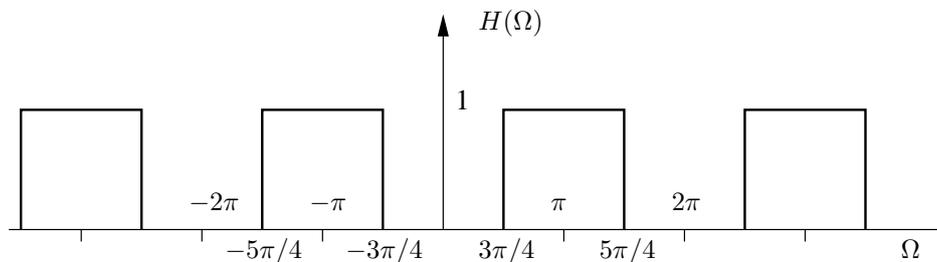
(a) Calcular $x[n] * y[n]$

(b) Calcular $x[n - 1] * y[n - 1]$

17. Sea la secuencia discreta

$$x[n] = j^n + (-1)^n$$

y el sistema discreto, LTI con respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ tal y como la que representa la figura



(a) Calcule los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x[n]$

(b) Si la entrada al sistema $H(\Omega)$ es $x[n]$, ¿cuál es la salida?

18. Sea el LTI causal de respuesta al impulso $h[n]$ y que puede describirse mediante la ecuación en diferencias

$$y[n] - y[n - 1] + 0.5y[n - 2] = x[n] - 2x[n - 1]$$

(a) Calcule la salida del sistema cuando su entrada es $x[n] = \cos(\Omega_0 n)$.

(b) Encuentre dos sistemas $h_1[n]$ y $h_2[n]$ diferentes tales que

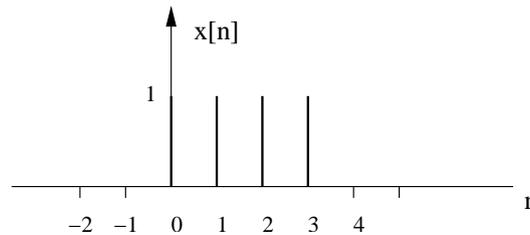
$$h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

19. La respuesta al escalón unidad de un sistema LTI es

$$s[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n], \quad |a| < 1$$

(a) Obtenga la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema, indicando si se trata de un sistema estable y/o causal.

(b) Calcular la salida del sistema para la entrada



20. Sea el sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t - k)$$

siendo a real y $0 < a < 1$.

(a) Calcule la respuesta en frecuencia del sistema.

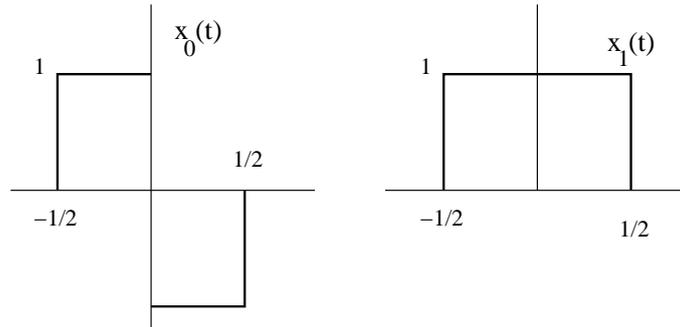
(b) Obtenga la respuesta al impulso del sistema inverso.

(c) Calcule las salidas cuando se aplican las siguientes entradas

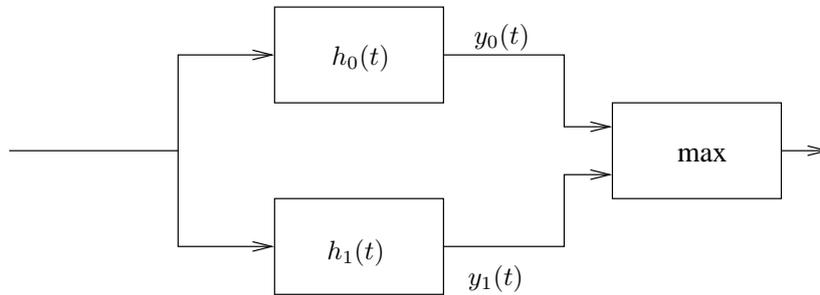
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/4 \\ 0, & 1/4 < |t| < 1/2 \end{cases} \quad \text{Periódica de periodo 1}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/4 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

21. Supóngase que cierto sistema A envía a otro B la señal $x_0(t)$ si desea transmitir un '0' y la señal $x_1(t)$ si desea transmitir un '1'.



Supóngase que, de forma muy esquemática, el sistema B realiza el proceso de la figura



($h_0(t) = x_0(-t) = -x_0(t)$, $h_1(t) = x_1(-t) = x_1(t)$) donde "max" decide '0' si $|y_0(0)| > |y_1(0)|$ y decide '1' en caso contrario.

- (a) Calcule las salidas $y_1(t)$ e $y_0(t)$ cuando las entradas son $x_1(t)$ y $x_0(t)$. ¿Qué decide el sistema en cada caso?
- (b) Supóngase ahora que el sistema A envía una señal $x_1(t)$. En su viaje de A a B la señal se contamina por la presencia de una señal de interferencia

$$z(t) = C \sin(2\pi t)$$

de modo que el sistema B recibe a su entrada la señal

$$x(t) = x_1(t) + z(t)$$

Expresa la decisión del sistema B en función del parámetro C .

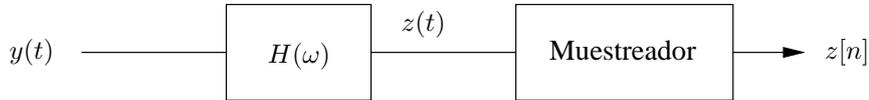
22. Considere la señal $x_a(t)$ dada por

$$x_a(t) = \frac{a}{a^2 + t^2}$$

- (a) Calcule $X_a(\omega)$.
- (b) Sea $y(t)$ la salida del sistema de respuesta al impulso

$$h_b(t) = \frac{b}{b^2 + t^2}$$

cuando la entrada es $x_a(t)$. Suponga que $y(t)$ se pasa por el sistema de muestreo de la figura,



siendo

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq B \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Encuentre la relación que han de cumplir las constantes a y b para garantizar que la señal $z(t)$ puede ser recuperada a partir de $z[n]$, conserve al menos el 75% de la energía de $y(t)$.

23. Calcule las siguientes expresiones:

(a) $E = \int_{-3}^3 \log(7t) \delta(t - 6) dt$

(b) $E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4t}{t^2-1} \delta(t - k) dt$

(c) $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j \left(\frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{(3+j\omega)^2} \right) \right) e^{j\omega t} d\omega$

24. Calcule la transformada de Fourier de la señal $x(t)$, siendo ésta una señal periódica con periodo $T = 2$ y $x(t) = e^{-t}$ para $-1 < t \leq 1$.

25. Sea $x(t)$ una señal real tal que $X(\omega) = -X(-\omega)$. Si $\hat{x}(t)$ es la transformada de Hilbert de $x(t)$, explique qué clase de simetría tiene la señal $x_a(t)$ que se define como

$$x_a(t) = jx(t) * \hat{x}(t)$$

26. Un sistema LTI discreto viene caracterizado por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] - a^2 y[n - 2] = -ax[n - 1]$$

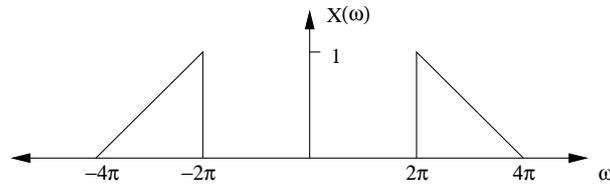
siendo a un número real tal que $|a| < 1$. Calcule la respuesta al impulso del sistema.

27. Sea un sistema discreto con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$. Determine si los sistemas definidos por las siguientes relaciones corresponden a sistemas lineales e invariantes con el tiempo:

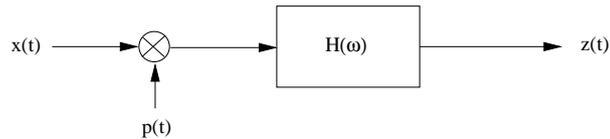
(a) $Y(\Omega) = \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$

(b) $Y(\Omega) = \sqrt{X(\Omega)}$

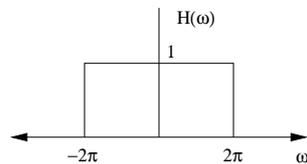
28. La transformada de Fourier de una señal $x(t)$ es tal y como se muestra en la figura



La señal $x(t)$ se procesa de acuerdo con el siguiente esquema



siendo $p(t) = 2 \cos(\omega_0 t)$ y $H(\omega)$ un filtro pasobajo



- (a) Represente $Z(\omega)$ cuando $\omega_0 = 5\pi/2$.
 - (b) Calcule para qué valores de ω_0 se cumple que $x(t)$ y $z(t)$ tienen igual energía.
29. Calcule la transformada de Laplace de las siguientes señales, usando para ello la integral. Determine la región de convergencia.

- (a) $x(t) = \sin(t)u(t)$
- (b) $x(t) = \sin(t)$
- (c) $x(t) = e^{2t}u(t)$
- (d) $x(t) = te^{2t}u(t)$

30. La transformada de Laplace de dos señales derechas $f(t)$ y $g(t)$ son

$$F(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

$$G(s) = \frac{3s + 1}{s^2 + 4s + 3}$$

- (a) Encuentre los polos de $F(s)$ y su ROC.
 - (b) Encuentre los polos de $G(s)$ y su ROC.
 - (c) Encuentre los polos de $F(s) + G(s)$ y su ROC.
31. Calcule la transformada Z de

(a) $x_1[n] = \delta[n - 3] - 4\delta[n - 2] + 6\delta[n - 1] - 4\delta[n] + \delta[n + 1]$

(b) $x_2[n] = e^{-an}u[n - 2]$

32. Determine si las siguientes funciones de transferencia corresponden a respuestas al impulso finitas o infinitas. Determine su región de convergencia suponiendo que se trata de sistemas LTI causales.

(a) $H_1(z) = z^3 - 1$

(b) $H_2(z) = \frac{1}{z^3} - 1$

(c) $H_3(z) = \frac{1}{z^2}$

(d) $H_4(z) = 1 + \frac{z+1}{z-0.5}$

(e) $H_5(z) = \frac{2z^2-4z+2}{z(z-1)}$

33. El sistema definido por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = 2x(t)$$

no es causal ni estable. Encuentre la respuesta del mismo a la señal de entrada $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

34. (a) Calcule la transformada de Fourier de $y(t) = t \frac{d^2x(t)}{dt^2}$.
 (b) Estudie la estabilidad del sistema discreto dado por la respuesta al impulso $h[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$.
 (c) De un sistema se sabe que para entrada $x(t) = 2^t$ produce salida $y(t) = t2^t$. Indique si dicho sistema puede ser LTI.
 (d) Indique si es verdadero o falso que $\frac{d}{dt}(x(t) * y(t)) = \frac{dx(t)}{dt} * \frac{dy(t)}{dt}$.

35. En la figura 1(a) se muestra el subsistema correspondiente al transmisor en un determinado sistema de comunicaciones por radio para señales de banda limitada, con $V(\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$, como se muestra en la figura 1(b).

- (a) Obtener y representar la transformada de Fourier de la señal $x(t)$, suponiendo $\omega_0 > \omega_M$.

En la figura 1(c) se muestra el subsistema correspondiente al receptor del sistema de comunicaciones. Por simplicidad, vamos a suponer que $\hat{x}(t) = x(t)$.

La señal recibida se muestrea periódicamente con periodo de muestreo $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, se filtra posteriormente mediante un filtro paso-bajo ideal, $h[n]$, de frecuencia de corte $\Omega_c = \frac{\pi}{2}$ y ganancia unitaria, y por último se realiza la conversión discreta a continua de la señal.

- (b) Indicar el valor máximo que puede tomar ω_M para que el receptor sea un sistema continuo LTI. Representar la transformada de Fourier de $x_p(t)$ y de $y[n]$ para el valor ω_M máximo calculado.
 (c) Representar la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción $H_{r1}(\omega)$ en caso de querer que la señal $y_1(t)$ sea paso-bajo.
 (d) Representar la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción $H_{r2}(\omega)$ en caso de querer que la señal $y_2(t) = \cos(\omega_0 t)y_1(t)$.

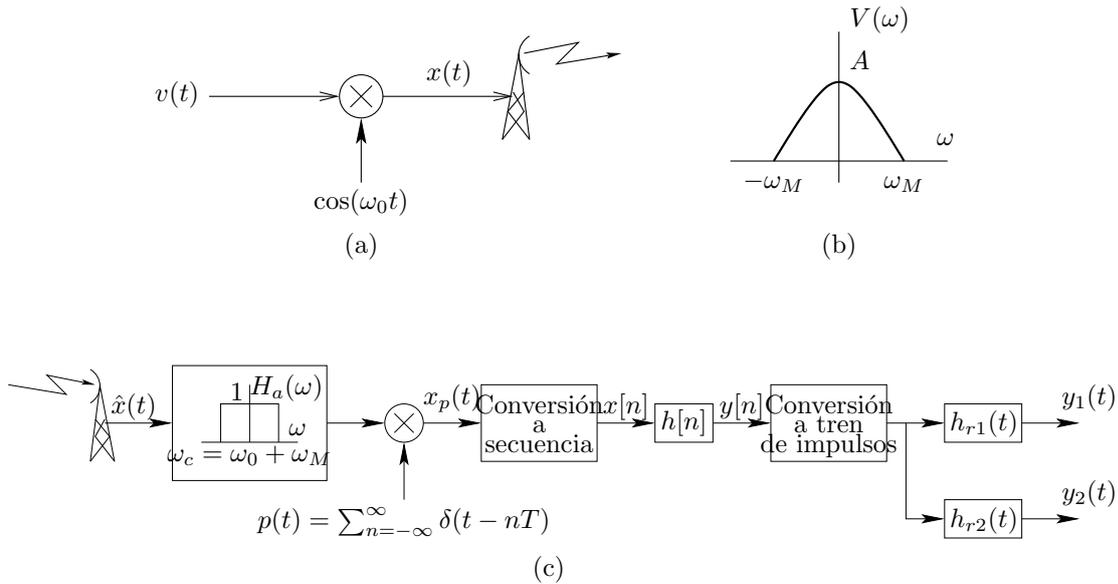


Figure 1: Problema 35

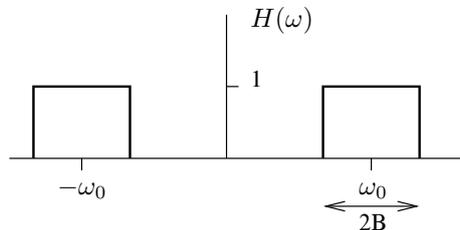
- (e) Obtener la respuesta al impulso del filtro de reconstrucción, $h_{r2}(t)$ obtenido en el apartado (d).
36. Un esquema usado para la modulación en amplitud de señales es el llamado “square-law modulator”. Este modulador hace uso del comportamiento de un dispositivo no lineal para obtener la señal deseada. Como entrada al modulador se genera una señal $v_1(t)$ definida como

$$v_1(t) = A_c \cos(\omega_0 t) + m(t)$$

Esta señal $v_1(t)$ se aplica a un dispositivo no lineal obteniendo así una tensión de salida $v_2(t)$. La respuesta del dispositivo a una entrada $x(t)$ es de la forma

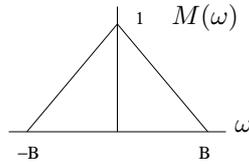
$$v_2(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t)$$

La señal $v_2(t)$ se pasa por un filtro pasobanda centrado en ω_0 y de anchura lateral $2B$ tal y como se muestra en el dibujo:



obteniendo así la señal $v_3(t)$.

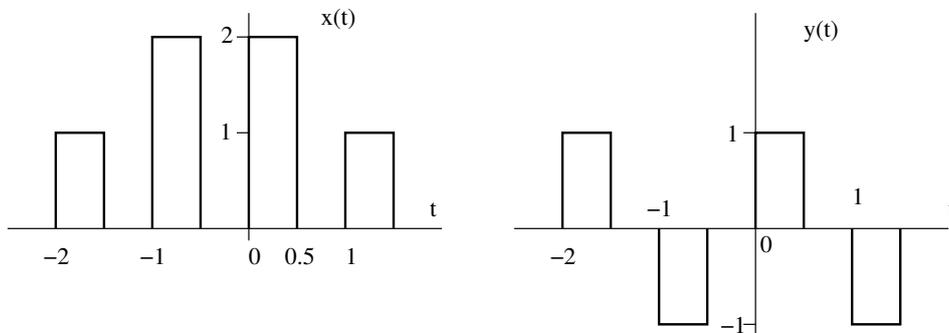
- (a) Dibuje la transformada de Fourier de las señales $m^2(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ y $v_3(t)$ para $\omega_0 \gg B$ cuando $m(t)$ tiene el siguiente espectro:



(NOTA: De la TF de $m^2(t)$ basta dibujar su forma aproximada, indicando su frecuencia máxima y su valor en el origen).

- (b) Proponga un esquema (en el dominio temporal) que permita recuperar $m(t)$ a partir de $v_3(t)$. ¿Existe alguna restricción en este esquema de modulación para poder recuperar la señal?
- (c) Calcule el máximo periodo al que se pueden muestrear las señales $m(t)$ y $v_1(t)$.
37. Sea la señal real $x(t)$ tal que $|X(\omega)| = 0 \quad |\omega| > 2B$.
- (a) Considere el sistema LTI con respuesta al impulso $H(\omega)$ tal y como se muestra en el problema 1 (filtro pasobanda). Encuentre un sistema (LTI o no) que al conectarse en cascada con $H(\omega)$ garantice que, cuando la entrada es $x(t)$, ésta puede recuperarse a partir de la salida.
- (b) Dibuje el diagrama de bloques que permite recuperar $x(t)$ a partir de la salida anterior.

38. Sean $x(t)$ e $y(t)$ las señales siguientes



Calcule y dibuje:

- (a) $z_0(t) = x(t) * y(t)$
- (b) $z_1(t) = x(t - 1) * y(t + 2)$
- (c) $z_2(t) = x(t) * y(-t)$
- (d) $z_3(t) = x(t) * \frac{dy(t)}{dt}$
- (e) $z_4(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \omega^2 Z_0(2\omega) \}$
39. Cuando en un sistema LTI la entrada es $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ la salida es $y(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)$. Razone si se puede o no determinarse la salida para cada una de las entradas siguientes. En caso afirmativo calcularla.

- (a) $x_1(t) = e^{j\omega_0 t}$
- (b) $x_2(t) = \cos(2\omega_0 t)$
- (c) $x_3(t) = \delta(t)$

40. Una señal continua

$$x_1(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) & 0 \leq t < 1.5 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

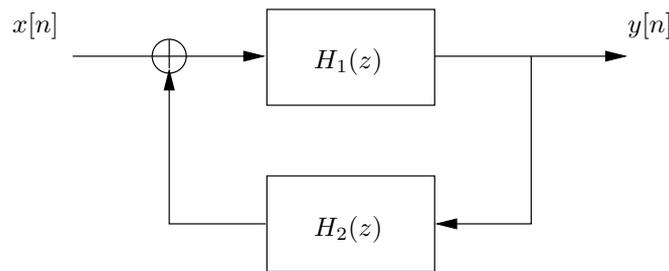
es la entrada a un sistema LTI con respuesta al impulso $x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 1.5k)$.

Denotaremos la salida del sistema por $x(t)$.

- (a) Dibuje las señales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x(t)$.
- (b) Calcule la transformada de Fourier de $x(t)$.
- (c) Calcule la señal de salida $y(t)$ cuando $x(t)$ es la entrada a un nuevo LTI con respuesta al impulso

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{e^{-j\omega}}{\omega^2 + 1} & |\omega| \leq \pi \\ 0 & |\omega| > \pi \end{cases}$$

41. Considere el sistema de la figura



Sabiendo que $h_1[n]$ es un sistema LTI causal que tiene un polo en $z_1 = 0.5$ y un cero en $z = 0.25$, y

$$h_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

- (a) Determinar la estabilidad del sistema.
- (b) Calcular el diagrama de polos y ceros del sistema.
- (c) Obtener la respuesta al impulso del sistema inverso causal.

42. Se va a proceder al estudio de un pulso rectangular $r(t)$, definido como

$$r(t) = \begin{cases} a & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

- (a) Dibuje el módulo de la transformada de Fourier de $r(t)$, $|R(\omega)|$.
- (b) Se muestrea $R(\omega)$ con un tren de deltas equidistantes ω_0 , dando lugar a la señal

$$R_p(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0)$$

Dibuje $R_p(\omega)$ para $|\omega| \leq \frac{4\pi}{T}$ cuando ω_0 vale $\frac{2\pi}{4T}$, $\frac{2\pi}{2T}$ y $\frac{2\pi}{T}$.

(c) Dibuje la función temporal $r_p(t)$ para cada uno de los valores de ω_0 del apartado anterior.