# Sistemas Lineales

## Soluciones de la Hoja de Problemas de Ampliación

1. (a) Lineal, invariante, sin memoria y causal.
   (b) No lineal, invariante, sin memoria y causal.
   (c) Lineal, invariante, causal, con memoria.
   (d) Lineal, invariante, anticausal, con memoria.
   (e) Lineal, invariante, causal, con memoria.
   (f) Lineral, invariante

   $$S\{x(t-\tau)\} = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(t'-\tau)dt' = \frac{1}{T}\int_{t-T-\tau}^{t-\tau} x(\eta)d\eta = y(t-\tau)$$

   causal, con memoria.
   (g) Lineal, invariante, causal, con memoria.
   (h) Lineal, variante

   $$S\{x(t-\tau)\} = x(t-\tau-T(t)) \neq y(t-\tau) = x(t-\tau-T(t-\tau))$$

   causal, con memoria.
   (i) Lineal, variante, no causal, con memoria.

2. El sistema es no lineal ni invariante a la vez. Sin embargo puede ser uno de los dos, aunque no es posible decir cuál.

3. a) sí, b) no, c) no, d) no, e) sí.

4. (a) $f_a = e^0 = 1$
   (b) $f_b = e^{-\tau}$
   (c) $f_c = \frac{1}{3}\cdot(0^2-2) = -\frac{2}{3}$
   (d) $f_d = \frac{1}{|-2|}\cdot 2\cdot e^{-2} = e^{-2}$

5. $\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{t-a}\right\} = e^{-j\omega a}\cdot\left\{\begin{array}{rl} -j\pi & \omega>0 \\ 0 & \omega=0 \\ j\pi & \omega<0 \end{array}\right. = -j\pi \mathrm{sign}(\omega)e^{-j\omega a}$

6. $X(\omega) = \left\{\begin{array}{cl} \frac{e^{j\omega T}}{10} & |\omega|\leq 10\pi \\ 0 & |\omega|>10\pi \end{array}\right.$

7. (a) $x_1(t) = 5e^{-t}\cos(4t)u(t)$
   (b) $x_2(t) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{4} & |t|\leq\frac{1}{8} \\ 0 & |t|>\frac{1}{8} \end{array}\right.$
   (c) $x_3(t) = \frac{1}{16}\left\{\begin{array}{ll} 4+t & -4<t\leq 0 \\ 4-t & 0<t<4 \\ 0 & \text{resto} \end{array}\right.$

8. (a)

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{1}{T}\left[u(t+T) - 2u(t) + u(t-T)\right] \\
\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \frac{1}{T}\left[\delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T)\right] \\
\updownarrow \mathfrak{F} &= \updownarrow \mathfrak{F} \\
-\omega^2 X(\omega) &= \frac{1}{T}\left[e^{j\omega T} - 2e^0 + e^{-j\omega T}\right]
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{T}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right] \\
\updownarrow \mathfrak{F} &= \updownarrow \mathfrak{F} \\
X(\omega) &= T\left(\frac{\mathrm{sen}(\omega T/2)}{\omega T/2}\right)^2
\end{aligned}$$

9. (a) $x_a(t) = \sum_k c_k e^{j\omega_0 kt}$, con $c_{-7} = c_{-1} = c-1 = c_7 = -\frac{1}{8}$, $c_{-3} = c_3 = \frac{1}{4}$, resto de coeficientes 0.

(b) $x_b(t) = \sum_k c_k e^{j\omega_0 kt}$ con

| $k$ | $-3, 1$ | $-1, 3$ | $-5, 7$ | $-7, 5$ | $-9, 11$ | $-11, 9$ | resto |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | $\frac{j5}{32}$ | $-\frac{j5}{32}$ | $-\frac{j5}{64}$ | $\frac{j5}{64}$ | $-\frac{j}{64}$ | $\frac{j}{64}$ | 0 |

(c) $x_c(t) = \sum_k c_k e^{j\omega_0 kt}$ con

| $k$ | 0 | $-2, 2$ | $-4, 4$ | $-6, 6$ | $-8, 8$ | $-10, 10$ | $-12, 12$ | $-14, 14$ | resto |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_k$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{3}{32}$ | $-\frac{1}{16}$ | $-\frac{1}{8}$ | $-\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{64}$ | 0 |

10. (a) Señal triangular de altura 1 entre $-\omega_g$ y $\omega_g$: $X(\omega) = \begin{cases} 1 + \frac{\omega}{\omega_g} & -\omega_g \leq \omega \leq 0 \\ 1 - \frac{\omega}{\omega_g} & 0 < \omega \leq \omega_g \\ 0 & |\omega| > \omega_g \end{cases}$

(b) La señal triangular queda multiplicada por $\frac{3\omega_g}{2\pi}$ y se duplica en los múltiplos enteros de $3\omega_g$.

11. (a)

$$\begin{aligned}
X(\omega) \text{ real} &\overset{\mathfrak{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x(t) \text{ simetría conjugada} \\
X(\omega) \text{ asimétrica} &\overset{\mathfrak{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x(t) \text{ compleja}
\end{aligned}$$

(b) Si se muestrea a $\omega_s = 2(\omega_0 + \omega_g)$ estamos desaprovechando ancho de banda. La frecuencia óptima de muestreo será para $\omega_s = 2\omega_g$ ($T = \frac{\pi}{\omega_g}$).

12. (a) $Z(\omega)$ tal y como aparece en la figura 1 (suponiendo que $\omega_0 > B$)

(b) Para recuperar $x_1(t)$ filtramos la señal $z(t)$ con un filtro pasobanda con la banda de paso comprendida entre $\omega_0$ y $\omega_0 + B$. Multiplicamos la señal por $2\cos(\omega_0 t)$ y filtramos con un filtro pasobajo con frecuencia de corte $B$.

13. (a) LTI

(b) LTI

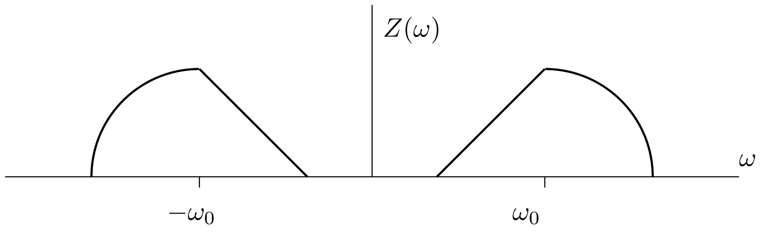


Figura 1: Soluciones al problema 12

(c) TI, no L

(d) L, no TI

(e) LTI

(f) L, no TI

(g) LTI

(h) LTI (las ecuaciones diferenciales describen sistemas LTI)

(i) L, no TI

(j) TI, no L

14. $y[2] = 1$, $y[3] = -6$, $y[4] = 0$, $y[5] = 5$.

15. (a) $y_1(t) = (1 - e^{-(t+1)})u(t+1) - (1 - e^{-(t-1)})u(t-1)$

    (b) $h(t) = \frac{dx_2(t)}{dt}$

    (c) $y_2(t) = \pi \cdot (t+1)x_1(t/2)x_2(t+1)$

16. (a) $z[n] = y[n-1] + 2y[n] + y[n+1]$

    (b) $z[n-2]$

17. (a) $x[n] = e^{j\frac{2\pi}{4}n} + e^{j2\frac{2\pi}{4}n}$

    (b) $y[n] = H(\frac{\pi}{2})e^{j\frac{\pi}{2}n} + H(\pi)e^{j\pi n} = e^{j\pi n}$

18. $H(\Omega) = \frac{1-2e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}+0.5e^{-2j\Omega}}$

    (a) $y[n] = \frac{1}{2}H(\Omega_0)e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2}H(-\Omega_0)2^{-j\Omega_0 n}$

    (b) $h_1[n] = 2^n u[n] - 2^{n-1}u[n-1] + 0.5 \cdot e^{n-2}u[n-2]$,
    $h_2[n] = -2^n u[-n-1] + 2^{n-1}u[-n] - 0.5 \cdot 2^{n-2}u[-n+1]$

19. (a) $h[n] = a^n u[n]$, causal y estable.

    (b) $y[n] = s[n] - s[n-4]$

20. (a) $H(\omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

    (b) $h^{-1}(t) = \delta(t) - a\delta(t-1)$

    (c) Señal periódica: $y(t) = \frac{1}{1-a}x(t)$ (Se recomienda hacerlo usando series de Fourier)

    No periódica: $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(t-k)$

21. Ver figura 2

(a)

$$\begin{aligned}
y_{11}(t) &= x_1(t) * h_1(t) = x_1(t) * x_1(-t) = x_1(t) * x_1(t) \\
y_{10}(t) &= x_1(t) * h_0(t) = -x_1(t) * x_0(t) \\
y_{01}(t) &= x_0(t) * h_1(t) = -x_0(t) * x_1(t) = -y_{10}(t) \\
y_{00}(t) &= x_0(t) * h_0(t) = -x_0(t) * x_0(t)
\end{aligned}$$

Si entra $x_0(t)$, $y_0(0) = 1$, $y_1(0) = 0$, decide “0”. Si entra $x_1(t)$, $y_1(0) = 1$, $y_0(0) = 0$, decide “1”.

(b) $|C| \leq \frac{\pi}{2}$, decide “1”, $|C| > \frac{\pi}{2}$, decide “0”.

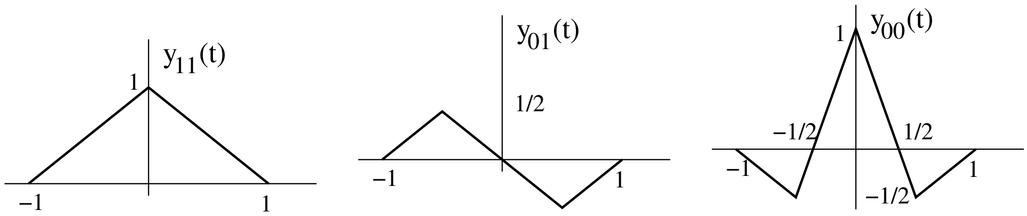


Figura 2: Soluciones al problema 21

22. (a) $X_a(\omega) = \pi e^{-a|\omega|}$ (por dualidad).
    (b) $|a| + |b| \geq \frac{\ln 4}{2B}$

23. (a) $E = 0$
    (b) $E = \frac{4k}{k^2-1}$
    (c) $x(t) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{ j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{(3+j\omega)^2}\right)\right\} = t^2 e^{-3t} u(t)$

24. $X(\omega) = \pi \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k (e-e^{-1})}{(1+jk\pi)} \delta(\omega - k\pi)$

25. Impar: $x_a(t) = -x_a(-t)$.

26. $h[n] = 0.5u[n](-a^n + (-a)^n)$

27. (a) Lineal y variante
    (b) No lineal y variante.

28. (a) $Z(\omega) = H(\omega)(X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0))$ Ver figura 3.
    (b) $2\pi < |\omega_0| < 4\pi$

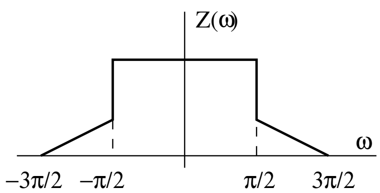


Figura 3: Solución al problema 28

29. (a) $X(s) = \frac{1}{s^2+1}$, $\Re\{s\} > 0$
    (b) No hay ROC

(c) $X(s) = \frac{1}{s-2}$, $\Re\{s\} > 2$

(d) $X(s) = \frac{1}{(s-2)^2}$, $\Re\{s\} > 2$

30. (a) $F(s) = \frac{2s+3}{(s+2)(s+1)}$, $\Re\{s\} > -1$

    (b) $G(s) = \frac{3s+1}{(s+3)(s+1)}$, $\Re\{s\} > -1$

    (c) $F(s) + G(s) = \frac{5s+11}{(s+2)(s+3)}$, $\Re\{s\} > -2$

31. (a) $X_1(z) = z^{-3} - 4z^{-2} + 6z^{-1} - 4 + z$

    (b) $X_2(z) = e^{-2a}\frac{1}{z(z-e^{-a})}$, $|z| > |e^{-a}|$

32. (a) Polo en infinito. (Finita) $|z| < \infty$

    (b) Polo en origen. (Finita) $0 < |z|$

    (c) Polo en origen. (Finita) $0 < |z|$

    (d) $H_4(z) = \frac{2z+0.5}{z-0.5}$. (Infinita). $|z| > 0.5$

    (e) $H_5(z) = \frac{2(z-1)}{z}$. (Finita) $0 < |z|$

33. El sistema así definido no tiene región de convergencia, debido a que la salida no es estable.

34. (a) $Y(\omega) = -j\left(2\omega X(\omega) + \omega^2\frac{dX(\omega)}{d\omega}\right)$

    (b) $\sum_n |\cos Kn| = \infty$. No es estable

    (c) NO es LTI.

    (d) Falso

35. (a) $X(\omega) = \frac{1}{2}\left(V(\omega+\omega_0) + V(\omega-\omega_0)\right)$. (Señal $V(\omega)$ centrada en $\pm\omega_0$ con altura $A/2$).

    (b) $\omega_{M_{max}} = \frac{\omega_0}{2}$. $Y(\Omega)$ en figura 4.

    (c) Filtro pasobajo con frecuencia de corte $\pi/T$ y ganancia $T$.

    (d) Filtro pasobanda, con banda de paso $\pi/T < |\omega| < 3\pi/T$ y ganancia $T/2$

    (e) $h_{r_2}(t) = \frac{W_{max}}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{W_{max}t}{\pi}\right) - \frac{W_{min}}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{W_{min}t}{\pi}\right)$, con $W_{max} = 3\pi/T$ y $W_{min} = \pi/T$

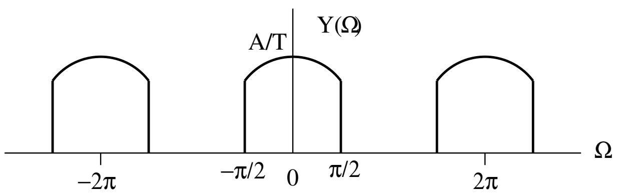


Figura 4: Solución al problema 35

36. (a) Altura de $G(\omega) = \mathfrak{F}\{m^2(t)\}$ $h = \frac{B}{3\pi}$. Resto de alturas: $d_1 = a_2A_c^2\pi$, $d_2 = a_1$, $d_3 = a_1A_c\pi$, $d_4 = a_2A_c$, $d_5 = a_2A_c^2\pi/2$, $d_6 = a_2h$. (Ver figura 5)

    (b) Restricción $\omega_0 \geq 3B$. Esquema: multiplicar por $e^{\pm j\omega_0 t}$, filtro pasobajo (frecuencia de corte $B$ y ganancia $1/(A_ca_2)$ y hay que quitar la componente de continua (por ejemplo restando $a_1/2a_2$).

    (c) Para $m(t)$: $T_{max} = \pi/B$, para $v_1(t)$: $T_{max} < \pi/\omega_0$

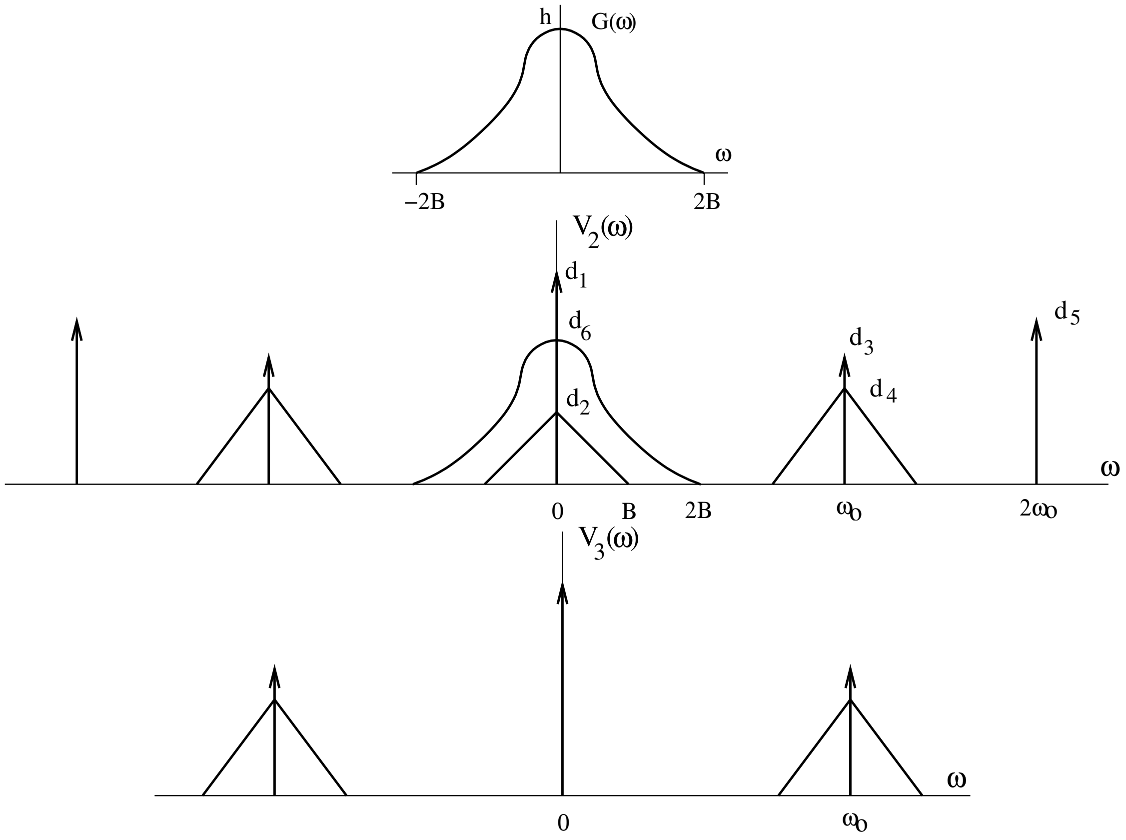


Figura 5: Solución al problema 36

37. (a) Multiplico $x(t)$ por $\cos((\omega_0 - B)t)$ antes de pasar por el filtro.
    (b) Multiplico por $\cos((\omega_0 - B)t)$ y filtro con un filtro pasobajo de frecuancia de corte $2B$ y ganancia 4.

38. Defino $p(t)$ un pulso cuadrado de altura 1 y ancho 0.5. Defino a su vez $q(t) = p(t) * p(t)$ (pulso triangular de altura 1/2 entre 0 y 1). Con esta definición

$$x(t) = p(t+2) + 2p(t+1) + 2p(t) + p(t-1)$$

$$y(t) = p(t+2) - p(t+1) + p(t) - p(t-1)$$

    (a) $z_0(t) = x(t) * y(t) = q(t+4) + q(t+3) + q(t+2) - q(t) - q(t-1) - q(t-2)$
    (b) $z_1(t) = x(t-1) * y(t+2) = z_0(t+1)$
    (c) $z_2(t) = x(t) * y(-t)$ (Que no es $z_0(-t)$)
    $y(-t) = -y(t-0.5)$
    $z_2(t) = -z_0(t-0.5)$
    (d) $z_3(t) = x(t) * \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dz_0(t)}{dt}$
    (e) $z_4(t) = -\frac{1}{2}\frac{d^2 z_0(t/2)}{dt^2}$

39. (a) $y(t) = e^{j\phi}e^{j\omega_0 t}$
    (b) $y(t) = \frac{H(2\omega_0)}{2}e^{j2\omega_0 t} + \frac{H(-2\omega_0)}{2}e^{-j2\omega_0 t}$. No puedo calcularla.
    (c) $y(t) = h(t)$. No puedo calcularla.

40. (a) $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$. Señal periódica.

(b) $a_k = \frac{1}{3\pi}\left(\frac{1+j}{1-4k/3} + \frac{1-j}{1+4k/3}\right)$

$X(\omega) = \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$, con $\omega_0 = \frac{2\pi}{1.5}$

(c) $y(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t} H(k\omega_0) = a_0 H(0) = a_0 = \frac{2}{3\pi}$

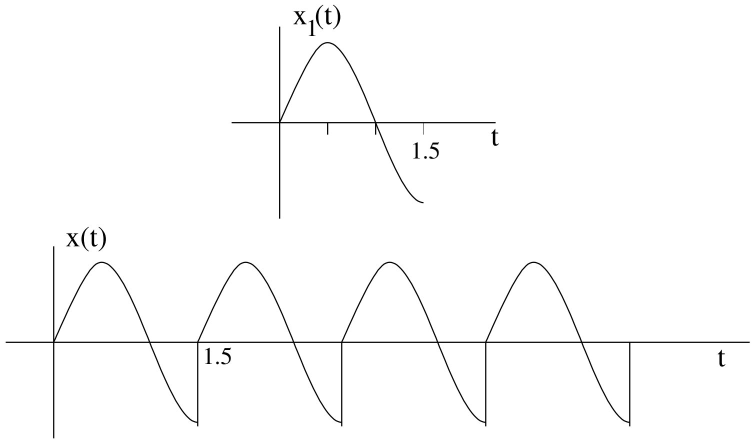


Figura 6: Solución al problema 40

41. Para este problema considere $H_1(z) = \frac{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$. A partir de la figura, deducimos $Y(z) = H_1(z)\left[X(z) + Y(z)H_2(z)\right]$ con lo que $H(z) = \frac{H_1(z)}{1-H_1(z)H_2(z)}$

   (a) Estable si $|z| > 2/7$.

   (b) Ceros en $z = 1/4$ y $z = 1/3$. Polos en $z = 2/7$ e infinito.

   (c) Partimos de $H^{-1}(z) = \frac{-\frac{7}{12}z^{-1}\left(1-\frac{2}{7}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$

   $h^{-1}[n] = -\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u[n-1]$.

42. (a) $R(\omega) = aT\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$ (Ver figura 7).

   (b) Ver figura 7

   (c) La función temporal se convierte en una serie de Fourier (función periódica): $r_p(t) = \frac{aT}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{kT}{T_0}\right) e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$, con $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Nótese que para $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ la señal se limita a $r_p(t) = a$.

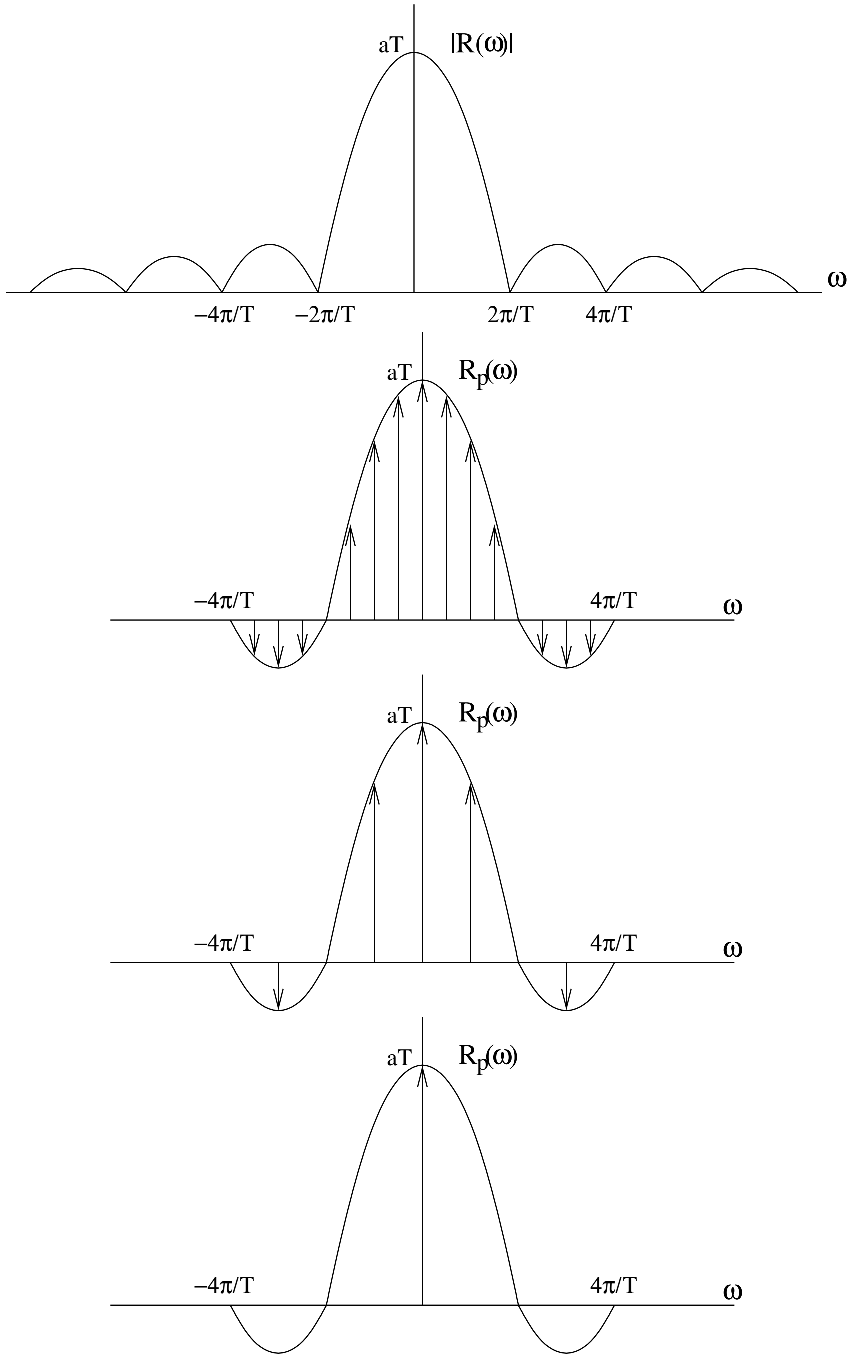


Figura 7: Solución al problema 42