Sistemas Lineales

Tema 1. Soluciones de la Hoja de Problemas (v2.0)

1. *a*) $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$. $P_\infty = 0$, $E_\infty = \frac{1}{4}$.
   b) $x_2(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$. $P_\infty = 1$, $E_\infty = \infty$.
   c) $x_3(t) = \cos(t)$. $P_\infty = \frac{1}{2}$, $E_\infty = \infty$.
   d) $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$. $P_\infty = 0$, $E_\infty = \frac{4}{3}$.
   e) $x_2[n] = e^{j(\pi/2n+\pi/8)}$. $P_\infty = 1$, $E_\infty = \infty$.
   f) $x_3[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n)$. $P_\infty = \frac{1}{2}$, $E_\infty = \infty$

2. Podemos escribir la señal del enunciado de la siguiente forma:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2e^{-3t} & -1 \leq t < 1 \\ e^{-3t} & t \geq 1 \end{cases}$$

A partir de aquí calculamos los valores indicados:

$$\begin{aligned} x_p &= \text{máx}\{x(t)\} = x(-1) = 2e^{3t} \\ p_i(t) &= |x(t)|^2 = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 4e^{-6t} & -1 \leq t < 1 \\ e^{-6t} & t \geq 1 \end{cases} \\ E_\infty &= \int_{-\infty}^{\infty} p_i(t)dt = \int_{-1}^{1} 4e^{-6t}dt + \int_{1}^{\infty} e^{-6t}dt = \frac{2}{3}e^6 - \frac{1}{2}e^{-6} \\ P_{AV} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} p_i(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}E_\infty = 0 \end{aligned}$$

La señal $x(t)$ no es una señal periódica, ya que no existe ningún valor $T \neq 0$ tal que $x(t) = x(t+T)$.

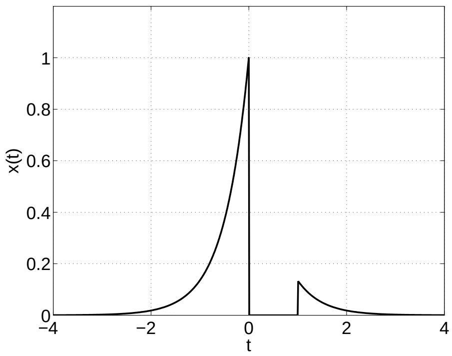
3. *a*) $x[n-3] = 0$ para $n < 1$ y $n > 7$.
   b) $x[n+4] = 0$ para $n < -6$ y $n > 0$.
   c) $x[-n] = 0$ para $n < -4$ y $n > 2$.
   d) $x[-n+2] = 0$ para $n < -2$ y $n > 4$.

4. *a*) $x(1-t) = 0$ para $t > -2$.
   b) $x(1-t) + x(2-t) = 0$ para $t > -1$.
   c) $x(1-t)x(2-t) = 0$ para $t > -2$.
   d) $x(3t) = 0$ para $t < 1$.
   e) $x(t/3) = 0$ para $t < 9$.

5. *a*) La señal que nos dan es equivalente a la señal

$$x(t) = e^{2t}u(-t) + e^{-2t}u(t-1)$$

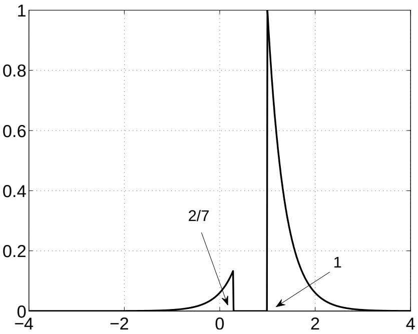
tal y como se muestra a continuación:



La transformación de variable independiente que se pide es equivalente a:

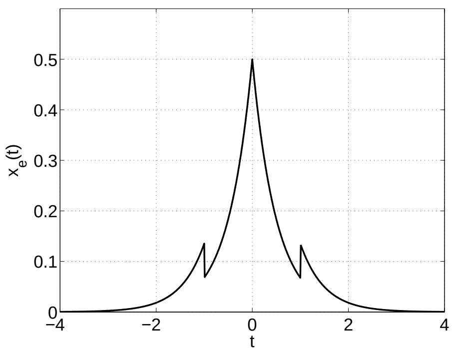
$$x\left(\frac{-7t-3}{5}+2\right)=x\left(-\frac{7}{5}t+\frac{7}{5}\right)$$

Puede hacerse de diversas formas, pero básicamente consiste en un abatimiento, un desplazamiento y un escalado:



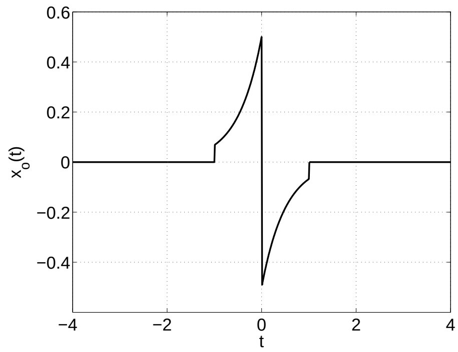
b) La parte par se define como

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \frac{x(t)+x(-t)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{2t}\left(u(-t)+u(-t-1)\right)+e^{-2t}\left(u(t)+u(t-1)\right)\right] \end{aligned}$$



La parte impar se define como

$$\begin{aligned} x_o(t) &= \frac{x(t)-x(-t)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{2t}\left(u(-t)-u(-t-1)\right)+e^{-2t}\left(u(t)-u(t-1)\right)\right] \end{aligned}$$



c) Dado que la señal es real, la parte hermítica coincide con la parte par, y la antihermítica con la parte impar.

d)

$$P_i(t) = |x(t)|^2 = e^{4t}u(-t) + e^{-4t}u(t-1)$$

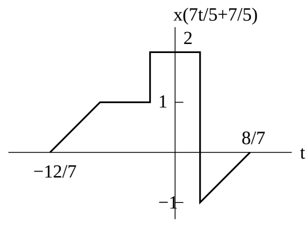
$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} P_i(t)dt = \frac{1+e^{-4}}{4}$$

$$P_{AV} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} P_i(t)dt = 0$$

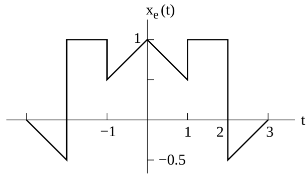
$$x_p = \max\{x(t)\} = 1$$

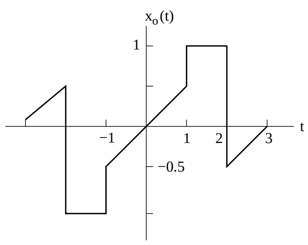
$$x_{AV} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = 0$$

6. *a*) (Se resuelve sólo $x\left(\frac{7t-3}{5}+2\right)$, el otro caso se hace de manera similar). Dado que $x\left(\frac{7t-3}{5}+2\right) = x\left(\frac{7t}{5}+\frac{7}{5}\right)$, lo único que se pide es un desplazamiento 7/5 hacia la izquierda, y posteriormente una compresión por un factor 5/7:



b) Parte par e impar como se detallan a continuación:





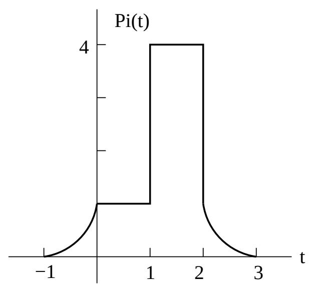
c) Dado que la señal es real, se cumple que $x(t) = x^*(t)$ y por lo tanto la parte hermítica es igual a la parte par, y la antihermítica a la impar.

d) Nuestra señal se define como

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ t+1 & -1 \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 2 & 1 \leq t < 2 \\ t-3 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & t \geq 4 \end{cases}$$

La potencia instantánea será

$$P_i(t) = |x(t)|^2 = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ (t+1)^1 & -1 \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 4 & 1 \leq t < 2 \\ (t-3)^2 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & t \geq 4 \end{cases}$$



La energía:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{17}{3}$$

La potencia media será 0 (por ser una señal de energía). El valor de pico:

$$x_p = \text{máx}\{|x(t)|\} = 2$$

El valor medio de la señal podemos considerarlo de dos formas. en primer lugar el valor medio de toda la señal:

$$x_{av} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt = 0$$

o como el valor medio en el intervalo en que está definida la señal:

$$x_{av} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} x(t)dt = \frac{1}{4}A(x(t)) = \frac{3}{4},$$

siendo $A(x(t))$ el área de la señal.

7. *a*) $x(t) = 2e^{j(t+\pi/4)}u(t)$ no periódica.

   b) $x[n] = u[n] + u[-n]$ no periódica.

c) $x(t) = 2\cos(3t + \pi/4)$ periódica, $T_0 = \frac{2\pi}{3}$.

d) $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$ periódica, $T_0 = 2$.

e) $x[n] = \cos(8\pi n/7 + 2)$ periódica, $N_0 = 7$.

f) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta[n - 4k] - \delta[n - 1 - 4k]\}$ periódica, $N_0 = 4$.

g) $x(t) = \left[\cos(2t - \frac{\pi}{3})\right]^2$ periódica, $T_0 = \frac{\pi}{2}$.

h) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ periódica, $N_0 = 8$.

i) $x(t) = \mathcal{E}v\{cos(4\pi t)u(t)\}$ es periódica de período, $T_0 = \frac{1}{2}$, si se define $u(t)$ así:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

j) $x(t) = \mathcal{O}d\{cos(4\pi t)u(t)\}$ no periódica.

k) $x[n] = \mathcal{E}v\{\cos(\pi n/4)u[n]\}$ no periódica.

l) $x[n] = \mathcal{O}d\{\text{sen}(n/4)u[n]\}$ no periódica.

m) $x(t) = \mathcal{O}d\{\text{sen}(t/4)u(t)\}$ periódica, $T_0 = 8\pi$.

n) $x[n] = \cos\left(\frac{11\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)e^{j\frac{2\pi}{3}n}$ periódica, $N_0 = 12$.

8. *a*) $x(t) = je^{j10t}$ periódica, $T_0 = \frac{\pi}{5}$.

   b) $x(t) = e^{(-1+j)t}$ no periódica.

   c) $x[n] = e^{j7\pi n}$ periódica, $N_0 = 2$.

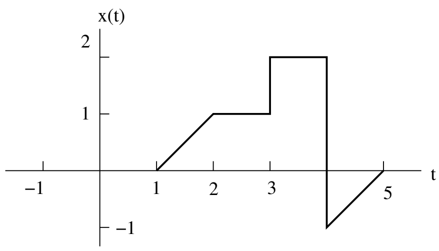
   d) $x[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5}$ periódica, $N_0 = 10$.

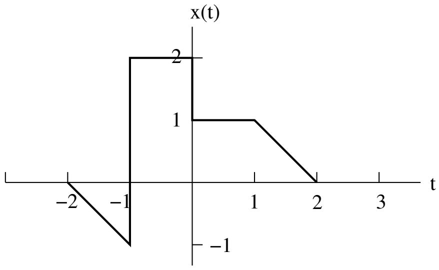
   e) $x[n] = 3e^{j3/5(n+1/2)}$ no periódica.

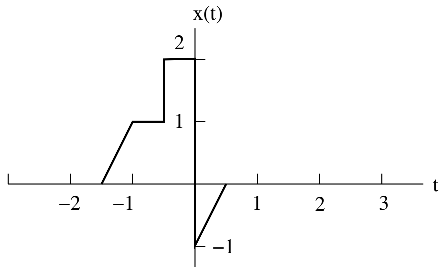
9. *a*) $x(t) = 2\cos(10t + 1) - \sin(4t - 1)$. $T_0 = \pi$.

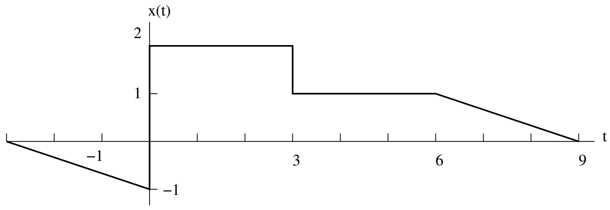
   b) $x[n] = 1 + e^{j4\pi n/7} - e^{j2\pi n/5}$. $N_0 = 35$.

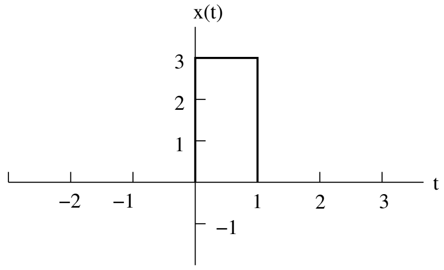
10.

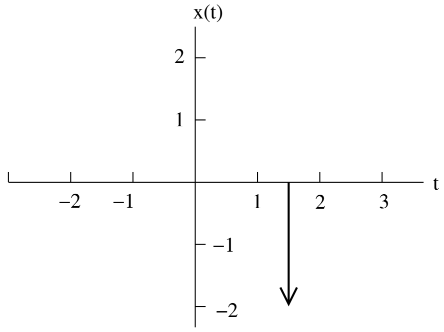




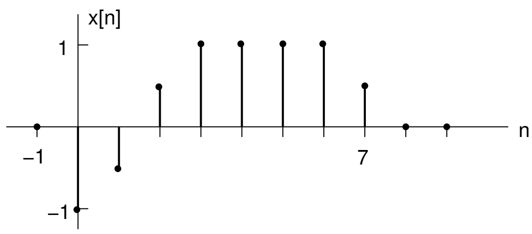

x(t)
2
1
−2 −1 1 2 3
−1
t

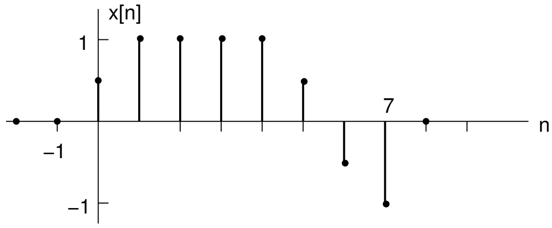

x(t)
2
1
−1
3
6
9
−1
t

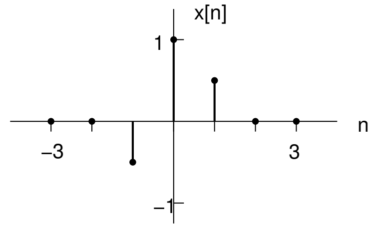

x(t)
3
2
1
−2 −1 1 2 3
−1
t

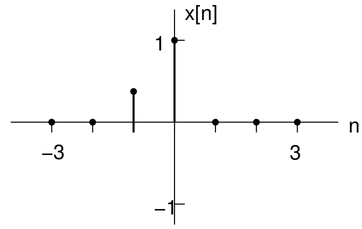

x(t)
2
1
−2 −1 1 2 3
−1
−2
t

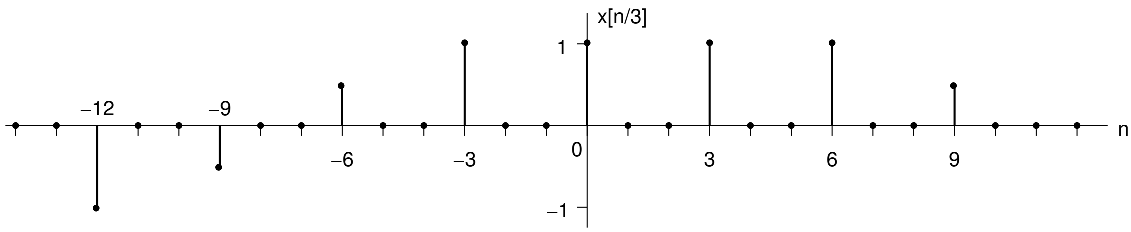
11.

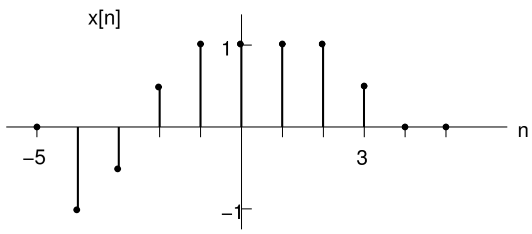

x[n]
1
−1
7
−1
n

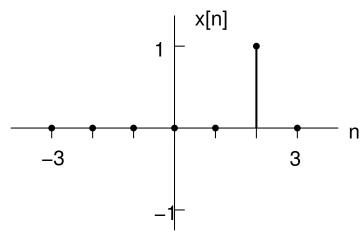

x[n]
1
7
−1
−1
n

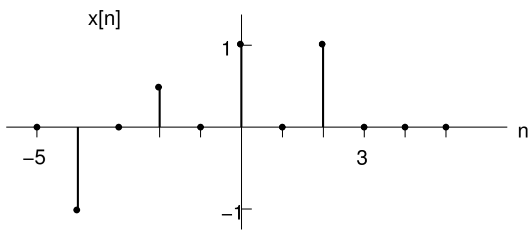












12. *a*) Si $x[n]$ es una señal impar, entonces

$$x[n] = -x[-n]$$

y además, $x[0]=0$. Siendo así, podemos afirmar

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty}(x[n]+x[-n]) = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty}(x[n]-x[n]) = x[0] = 0$$

como queríamos demostrar.

b) Si $x_1[n]$ es impar entonces

$$x_1[n] = -x_1[-n]$$

y si $x_2[n]$ es par entonces

$$x_2[n] = x_2[-n]$$

El producto de ambas señales será:

$$x_1[n]x_2[n] = (-x_1[-n])(x_2[-n]) = -(x_1[-n]x_2[-n])$$

de forma que queda demostrado que $x_1[n]x_2[n]$ es impar.

c) Si $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_e[n]+x_o[n])^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_e^2[n]+x_o^2[n]+2x_e[n]x_o[n]) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2x_e[n]x_o[n]$$

Sucede que $2x_e[n]x_o[n]$ es impar (apartado (b)), así que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2x_e[n]x_o[n] = 0$ (apartado (a)). Queda entonces que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n]$$

13. *a*) Si $x(t)$ es una señal impar, entonces

$$x(t) = -x(-t)$$

y además $x(0)=0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{0} x(t)dt + \int_{0}^{\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{0} -x(-t)dt + \int_{0}^{\infty} x(t)dt =$$

$$= -\int_{0}^{\infty} x(t)dt + \int_{0}^{\infty} x(t)dt = 0$$

b) Si $x_1(t)$ es par y $x_2(t)$ es impar, entonces el producto de ambas

$$x(t) = x_1(t)x_2(t) = -x_1(-t)x_2(-t) = -x(-t)$$

es impar.

c) si $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x_e(t)^2 + x_o^2(t) + x_e(t)x_o(t))dt$$

Como $x_e(t)x_o(t)$ es impar (demostrado en el apartado anterior) y la integral de una función impar es cero (demostrado en el primer apartado), entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)dt$$

14. Ver la tabla mostrada a continuación de la definición de los sistemas.

	MEMORIA	INVARIANZA TEMPORAL	LINEALIDAD	CAUSALIDAD	ESTABILIDAD	INVERTIBILIDAD
(a)	NO	SÍ	NO	SÍ	SÍ	SÍ
(b)	SÍ	SÍ	NO	SÍ	SÍ	NO
(c)	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ*	NO	NO
(d)	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	SÍ
(e)	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO*
(f)	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
(g)	NO	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO
(h)	SÍ	SÍ	SÍ	NO	SÍ	NO
(i)	NO	NO	SÍ	SÍ	NO	NO
(j)	SÍ	NO	SÍ	NO	NO	NO
(k)	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	SÍ
(l)	NO	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO
(m)	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	SÍ
(n)	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO

15. No puede ser lineal e invariante en el tiempo a la vez.

16. Oppenheim 1.13. $E_\infty = 4$

17. Oppenheim 1.15.

    a) $y[n] = 2x[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4]$
    b) $y[n] = 2x[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4]$

18. Oppenheim 1.30.

    a) Invertible. Sistema inverso $y(t) = x(t+4)$
    b) No Invertible. Las señales $x_1(t)$ y $x_2(t) + 2\pi$ dan la misma salida.
    c) No Invertible. Las señales $x_1[n] = \delta[n], x_2[n] = 2\delta[n]$ ambas dan $y[n] = 0$.
    d) Invertible. Sistema inverso $y(t) = dx(t)/dt$
    e) Invertible. Sistema inverso $y[n] = \begin{cases} x[n+1] & n \geq 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$
    f) No invertible. $x_1[n]$ y $x_2[n] = x_1[-n]$
    g) Invertible. Sistema inverso $y[n] = x[1-n]$

h) Invertible. Sistema inverso $y(t) = x(t) + dx(t)/dt$

i) Invertible. Sistema inverso $y[n] = x[n] - (1/2)x[n-1]$

j) Invertible. Si $x(t)$ es cualquier cte, entonces $y(t) = 0$.

k) No invertible. $x_1[n] = \delta[n]$, $x_2[n] = 2\delta[n]$, ambas dan $y[n] = 0$.

l) Invertible. Sistema inverso $y(t) = x(t/2)$

m) No invertible. $x_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$, $x_2[n] = \delta[n]$, ambas dan $y[n] = \delta[n]$.

n) Invertible. Sistema inverso $y[n] = x[2n]$

19. Oppenheim 1.38.

    a) Sabemos que $2\delta_\Delta(2t) = \delta_\Delta(t)$, entonces
    $\lim\limits_{\Delta\to 0} 2\delta_\Delta(2t) = \lim\limits_{\Delta\to 0} \delta_\Delta(t) \Rightarrow \delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$

20. Oppenheim 1.41.

    a) $y[n] = 2x[n]$, luego el sistena es invariante en el tiempo.

    b) $y[n] = (2n-1)x[n]$ luego el sistena no es invariante en el tiempo.

    c) $y[n] = x[n](1 + (-1)^n + 1 + (-1)^{n-1}) = 2x[n]$, luego el sistena es invariante en el tiempo.