

## SISTEMAS LINEALES

### TEMA 3. SOLUCIONES NUMÉRICAS DE LA HOJA DE PROBLEMAS (v2.0)

1. La salida no se puede escribir  $y(t) = Ax(t)$ , siendo A un valor que no depende de  $t$ .

2. (a) Sí, (b) No, (c) No.

3. (a)  $a_1 = 1, a_k = 0, k \neq 1$ .

$$(b) a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j), & k = 1 \\ \frac{1}{2}e^{j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j), & k = -1 \\ 0, & |k| \neq 1 \end{cases}$$

$$(c) a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 1 \\ \frac{1}{2}, & k = -1 \\ \frac{-1}{2}j, & k = 2 \\ \frac{1}{2}j, & k = -2 \\ 0, & |k| \neq 1, 2 \end{cases}$$

$$(d) a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 2 \\ \frac{1}{2}, & k = -2 \\ \frac{-1}{2}j, & k = 3 \\ \frac{1}{2}j, & k = -3 \\ 0, & |k| \neq 2, 3 \end{cases}$$

$$(e) a_k = \frac{e^{(1+jk\pi)} - e^{-(1+jk\pi)}}{2(1+jk\pi)} = (e - e^{-1}) \frac{(-1)^k}{2(1+jk\pi)}$$

$$(f) a_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{j(-1)^k}{k\pi}, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$(g) a_k = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{j\pi/4}, & k = 4 \\ \frac{1}{4}e^{-j\pi/4}, & k = -4 \\ \frac{1}{2}e^{j\pi/4}, & k = 5 \\ \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}, & k = -5 \\ \frac{1}{4}e^{j\pi/4}, & k = 6 \\ \frac{1}{4}e^{-j\pi/4}, & k = -6 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

$$(h) a_k = \begin{cases} \frac{3}{4}, & k = 0 \\ -\frac{2\pi+1}{4\pi}j, & k = 2 \\ \frac{2\pi+1}{4\pi}j, & k = -2 \\ \frac{1-(-1)^k}{2(k\pi)^2} + \frac{(-1)^{k+1}}{2k\pi}j = \begin{cases} -\frac{1}{2k\pi}j, & k \text{ par} \\ \frac{1}{(k\pi)^2} + \frac{1}{2k\pi}j, & k \text{ impar} \end{cases}, & k \neq 0, \pm 2 \end{cases}$$

$$(i) a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ \frac{3(\cos(k\pi/3) - \cos(2k\pi/3))}{(k\pi)^2} = \begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \frac{6 \operatorname{sen}(k\pi/2) \operatorname{sen}(k\pi/6)}{(k\pi)^2}, & k \text{ impar} \end{cases}, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$(j) a_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{3j}{2(k\pi)^2} [-e^{j2k\pi/3} \operatorname{sen}(2k\pi/3) + 2e^{-jk\pi/3} \operatorname{sen}(k\pi/3)], & k \neq 0 \end{cases}$$

$$(k) a_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{-1}{4}j, & k = 2 \\ \frac{1}{4}j, & k = -2 \\ \frac{(-1)^{k-1}}{\pi(k^2-4)} = \begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \frac{-2}{\pi(k^2-4)}, & k \text{ impar} \end{cases}, & k \neq 0, \pm 2 \end{cases}$$

$$(l) a_k = \frac{1}{2} - (-1)^k = \begin{cases} \frac{-1}{2}, & k \text{ par} \\ \frac{3}{2}, & k \text{ impar} \end{cases}$$

$$(m) a_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{\cos(k\pi/3) - \cos(2k\pi/3)}{k\pi} j = \begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \frac{2}{k\pi} \text{sen}(k\pi/2) \text{sen}(k\pi/6)j, & k \text{ impar} \end{cases}, & k \neq 0 \end{cases}$$

4. Expresaremos la salida  $y(t)$  mediante su representación en serie de Fourier,  $y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$ :

$$(a) b_k = \begin{cases} \frac{1}{8+j4\pi}, & k = 1 \\ \frac{1}{8-j4\pi}, & k = -1 \\ 0, & |k| \neq 1 \end{cases}$$

$$(b) b_k = \begin{cases} \frac{1}{8j-8\pi}, & k = 2 \\ \frac{1}{-8j-8\pi}, & k = -2 \\ \frac{e^{j\pi/4}}{8+j12\pi}, & k = 3 \\ \frac{e^{-j\pi/4}}{8-j12\pi}, & k = -3 \\ 0, & |k| \neq 2, 3 \end{cases}$$

$$(c) b_k = \frac{1}{4+jk2\pi}$$

$$(d) b_k = \frac{1-(-1)^k}{8+jk2\pi}$$

5. (a)  $\Re\{X(\omega)\} = 0$ . Esto es equivalente a que  $X(\omega)$  sea imaginaria pura. Según la propiedad de conjugación y simetría, si una señal  $x(t)$  es real e impar, entonces su transformada de Fourier  $X(\omega)$  es imaginaria pura.
- Cumplen esta condición las señales (a) y (d).
- (b)  $\Im\{X(\omega)\} = 0$ . Esto es equivalente a que  $X(\omega)$  sea real. Según la propiedad de conjugación y simetría, si una señal  $x(t)$  es real y par, entonces su transformada de Fourier  $X(\omega)$  es real.
- Cumplen esta condición las señales (e) y (f).
- (c)  $\exists \alpha \in \mathcal{R}$  tal que  $e^{j\alpha\omega} X(\omega) \in \mathcal{R}$ . Entonces, ha de ser  $X(\omega) = K e^{-j\alpha\omega}$ ,  $K \in \mathcal{R}$ . Para ello,  $x(t)$  ha de ser una señal real y par (cuya transformada de Fourier es real), desplazada un valor  $t_0 = \alpha$ , puesto que un desplazamiento de  $t_0$  en el tiempo se traduce en multiplicar un término  $e^{-jt_0\omega}$ .
- Cumplen esta condición las señales (a) ( $\alpha = \pm 1, \pm 3 \dots$ ), (b) ( $\alpha = 1$ ), (e) ( $\alpha = 0$ ) y (f) ( $\alpha = 0$ ).
- (d)  $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega = 0$ . A partir de la ecuación de síntesis  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ , si tomamos  $t = 0$ , queda  $x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$ . Entonces, para cumplir la condición ha de ser  $x(0) = 0$ .
- Cumplen esta condición las señales (a), (b), (c), (d), (f).

(e)  $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(\omega) d\omega = 0$ . Utilizando la propiedad de derivación:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X(\omega)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} j\omega X(\omega)$$

Entonces, aplicando esto a la ecuación de síntesis:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Para  $t = 0$ :

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega) d\omega$$

Entonces, para cumplir la condición ha de ser  $\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$

• Cumplen esta condición las señales (b), (c), (e) y (f).

(f)  $X(\omega)$  es periódica.  $X(\omega)$  se debe poder poner como una serie de Fourier en frecuencia:  $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkT_0\omega}$ , con lo que por dualidad, en el tiempo debe corresponder a una serie de deltas.

• Cumple esta condición la señal (b).

6. (a)  $X(\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}$

(b)  $X(\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{2-j\omega} + \frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega} = \frac{4e^{-j\omega}}{\omega^2+4}$

(c)  $X(\omega) = 2 \cos(\omega)$

(d)  $X(\omega) = -2j \operatorname{sen}(2\omega)$

7. (a)  $X(\omega) = \pi e^{-j\pi/4} \delta(\omega - 2\pi) + \pi e^{j\pi/4} \delta(\omega + 2\pi)$

(b)  $X(\omega) = 2\pi \delta(\omega) + \pi e^{j\pi/8} \delta(\omega - 6\pi) + \pi e^{-j\pi/8} \delta(\omega + 6\pi)$

(c)  $X(\omega) = \pi \delta(\omega + 2\pi) + \pi \delta(\omega - 2\pi) + \pi j \delta(\omega + 3\pi) - \pi j \delta(\omega - 3\pi)$

8. (a)  $X(\omega) = \frac{1}{2[\alpha+j(\omega-\omega_0)]} + \frac{1}{2[\alpha+j(\omega+\omega_0)]}$

(b)  $X(\omega) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{3+2j-j\omega} - \frac{1}{3-2j-j\omega} + \frac{1}{3-2j+j\omega} - \frac{1}{3+2j+j\omega} \right] = 3j \left[ \frac{1}{9+(\omega+2)^2} - \frac{1}{9+(\omega-2)^2} \right]$

(c)  $X(\omega) = \frac{2 \operatorname{sen}(\omega)}{\omega} + \frac{\operatorname{sen}(\omega-\pi)}{\omega-\pi} + \frac{\operatorname{sen}(\omega+\pi)}{\omega+\pi} = \frac{2 \operatorname{sen}(\omega)}{\omega} - \frac{\operatorname{sen}(\omega)}{\omega-\pi} - \frac{\operatorname{sen}(\omega)}{\omega+\pi}$

(d)  $X(\omega) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega T}}$

(e)  $X(\omega) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{(2-4j+j\omega)^2} - \frac{1}{(2+4j+j\omega)^2} \right]$

(f)  $X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -3\pi \\ \frac{1+e^{-j\omega}}{j2\pi}, & -3\pi < \omega < -\pi \\ 0, & -\pi < \omega < \pi \\ \frac{-1-e^{-j\omega}}{j2\pi}, & \pi < \omega < 3\pi \\ 0, & \omega > 3\pi \end{cases}$

(g)  $X(\omega) = \frac{1}{j\omega} - \frac{2e^{-j\omega}}{\omega^2} - 2 \frac{e^{-j\omega}-1}{j\omega^3}$

(h)  $X(\omega) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1(k\pi) \delta(\omega - k\pi)$

$$X_1(\omega) = \frac{1}{1-e^{-2}} \left[ \frac{1-e^{-2(1+j\omega)}}{1+j\omega} + \frac{e^{-2}(e^{2(1-j\omega)}-1)}{1-j\omega} \right]$$

(i)  $X(\omega) = \frac{2 \cos(2\omega)}{\omega} j - \frac{2 \operatorname{sen}(\omega)}{\omega^2} j$

$$(j) X(\omega) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [2 + (-1)^k] \delta(\omega - k\pi)$$

$$9. (a) x(t) = \begin{cases} e^{j2\pi t}, & |t| < 3 \\ 0, & |t| > 3 \end{cases}$$

$$(b) x(t) = \frac{e^{j\pi/3}}{2} \delta(t+4) + \frac{e^{-j\pi/3}}{2} \delta(t-4)$$

$$(c) x(t) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\text{sen}(t-3)}{t-3} + \frac{\cos(t-3)-1}{(t-3)^2} \right]$$

$$(d) x(t) = \frac{-\cos(3t)}{\pi t} j + \frac{\text{sen}(2t)-\text{sen}(t)}{\pi t^2} j$$

$$(e) x(t) = \frac{2j}{\pi} \text{sen}(t) + \frac{3}{\pi} \cos(2\pi t)$$

$$10. (a) y(t) = \frac{1}{4} e^{-4t} u(t) - \frac{1}{4} e^{-2t} u(t) + \frac{1}{2} t e^{-2t} u(t)$$

$$(b) y(t) = -\frac{1}{4} e^{-2t} u(t) + \frac{1}{4} t e^{-2t} u(t) + \frac{1}{4} e^{-4t} u(t) + \frac{1}{4} t e^{-4t} u(t)$$

$$(c) y(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t) + \frac{1}{2} e^t u(-t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$$

$$11. y(t) = [1 - e^{-(t-1)}] u(t-1) - [1 - e^{-(t-5)}] u(t-5) \xrightarrow{\mathfrak{F}} Y(\omega) = e^{-j3\omega} \frac{2 \text{sen}(2\omega)}{\omega(1+j\omega)}$$

$$X(\omega) = e^{-j\omega^2} \frac{1}{1+j\omega}, H(\omega) = e^{-j\omega} \frac{2 \text{sen}(2\omega)}{\omega} \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = e^{-j3\omega} \frac{2 \text{sen}(2\omega)}{\omega(1+j\omega)}$$

12. (a) Periódica.

$$X_1(\omega) = \pi \delta(\omega + 9\omega_0) + \pi \delta(\omega + 6\omega_0) + \pi \delta(\omega - 6\omega_0) + \pi \delta(\omega - 9\omega_0)$$

(b) No periódica ( $\nexists$  frecuencia fundamental de la que todas sean múltiplo).

$$X_2(\omega) = \frac{\pi}{2} \left[ \delta(\omega + \omega_0(\sqrt{2} + 1)) - \delta(\omega + \omega_0(\sqrt{2} - 1)) + \delta(\omega - \omega_0(\sqrt{2} - 1)) - \delta(\omega - \omega_0(\sqrt{2} + 1)) \right]$$

(c) Periódica.

$$X_3(\omega) = j\pi [\delta(\omega + \omega_0(\sqrt{2} + 1)) - \delta(\omega - \omega_0(\sqrt{2} + 1))]$$

(d) No periódica.

$$X_4(\omega) = j\pi \sum_{n=1}^5 [\delta(\omega + \sqrt{n}\omega_0) - \delta(\omega - \sqrt{n}\omega_0)]$$

(e) Periódica.

$$X_5(\omega) = j\pi [\delta(\omega + \pi/2) - \delta(\omega - \pi/2)] + \pi [\delta(\omega + \pi/3) + \delta(\omega - \pi/3)]$$

13. Utilizando los  $a_k$  y  $\omega_0$  obtenidos en el ejercicio 3-(e):

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \frac{(-1)^k (e - e^{-1})}{1 + jk\pi} \delta(\omega - k\pi)$$

$$14. (a) h(t) = (e^{-2t} - e^{-4t})u(t)$$

$$(b) y(t) = (t^2/2 - t/2 + 1/4)e^{-2t}u(t) - (1/4)e^{-4t}u(t)$$

$$(c) h(t) = 2\delta(t) - \sqrt{2}(1-j)e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)t}u(t) - \sqrt{2}(1+j)e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)t}u(t)$$

15.  $P_\infty = 0, E_\infty = \frac{1}{3}$ .

16.

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a [1 - (-1)^k e^{-a}]}{a^2 + k^2 \pi^2} \delta(\omega - k\pi)$$

17. (a) Demostración similar al teorema de Parseval.

$$(b) X(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & -\omega_0 - B < \omega < -\omega_0 + B, \\ e^{j\omega t_0}, & \omega_0 - B < \omega < \omega_0 + B, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

$$(c) Y(\omega) = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

$$(d) \langle x(t), y(t) \rangle = \frac{2}{a^* - jt_0} [e^{-(a^* - jt_0)(\omega_0 - B)} - e^{-(a^* - jt_0)(\omega_0 + B)}]$$

$$(e) Z(\omega) = 2\pi e^{-a\omega} u(\omega) - 2\pi e^{a\omega} u(-\omega), \\ \langle x(t), z(t) \rangle = 0$$

18.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\pi} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(k\pi/2)}{\pi(1 - k^2)} \cos(kt) + \frac{1}{2} \cos(t) \\ &= \frac{1}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(1 - 4k^2)} \cos(2kt) + \frac{1}{2} \cos(t) \end{aligned}$$

19.  $\omega_0 = 2\pi k, k \in \mathcal{Z}, k \neq 0$

20.  $\omega_{\max} = 4\pi\omega_0, Y(0) = \frac{2}{3\omega_0}$

21.

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{8k}{j(4k^2 - 1)} \delta(\omega - 2\pi k).$$

La parte de la transformada de Fourier dentro del intervalo  $[-5\pi, 5\pi]$  es:

$$\frac{16}{15} j \delta(\omega + 4\pi) + \frac{8}{3} j \delta(\omega + 2\pi) - \frac{8}{3} j \delta(\omega - 2\pi) - \frac{16}{15} j \delta(\omega - 4\pi)$$