Sistemas Lineales

Tema 5. Soluciones de la Hoja de Problemas

1. (a) $\infty > |z| > \frac{1}{2}$
   (b) $|z| < \frac{1}{2}$
   (c) $|z| > 1$
   (d) $2 > |z| > \frac{1}{2}$

2. (a) $X(z) = 1$, ROC=Z.
   No tiene polos ni ceros.
   Tiene transformada de Fourier.
   (b) $X(z) = z^5$, ROC=$Z - \{\infty\}$.
   Polo de orden 5 en $z \to \infty$. Cero de orden 5 en $z = 0$.
   Tiene transformada de Fourier.
   (c) $X(z) = z^{-5}$, ROC=$Z - \{0\}$.
   Polo de orden 5 en $z = 0$. Cero de orden 5 en $z \to \infty$.
   Tiene transformada de Fourier.
   (d) $X(z) = \frac{z}{z+1}$, ROC=$\{|Z| > 1\}$
   Polo en $z = -1$.
   No tiene transformada de Fourier.
   (e) $X(z) = \frac{8z^4}{2z-1} = 4z^3 + 2z^2 + z + \frac{z}{2z-1}$, ROC=$\{\frac{1}{2} < z < \infty\}$.
   Polo en $z = \frac{1}{2}$ y de orden 3 en $z \to \infty$. Cero de orden 4 en $z = 0$.
   Tiene transformada de Fourier.
   (f) $X(z) = \frac{9z^2}{1+3z} = -1 + 3z + \frac{1}{1+3z}$, ROC=$\{|z| < \frac{1}{3}\}$.
   Polo en $z = -\frac{1}{3}$ y en $z \to \infty$. Cero de orden 2 en $z = 0$.
   No tiene transformada de Fourier.
   (g) $X(z) = \frac{1}{4^3}z^{-3}\frac{1}{1-4z} = \frac{1}{4^3}z^{-3} + \frac{1}{4^2}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{1-4z}$, ROC=$\{0 < |z| < \frac{1}{4}\}$.
   Polo de orden 3 en $z = 0$ y de orden 1 en $z = \frac{1}{4}$. Cero de orden 4 en $z \to \infty$.
   No tiene transformada de Fourier.
   (h) $X(z) = \frac{1}{1-z/2} + \frac{1}{1-\frac{1}{4z}} - 1 = \frac{7z}{(2-z)4z-1)}$, ROC=$\{\frac{1}{4} < |z| < 2\}$.
   Polos en $z = \frac{1}{4}$ y $z = 2$. Ceros en $z = 0$ y $z \to \infty$.
   Tiene transformada de Fourier.
   (i) $X(z) = 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3z}} - 1 - \frac{1}{3z}\right) = \frac{3z^{-2}}{3-z^{-1}}$, ROC=$\{|z| > 1/3\}$.
   Polo de orden 2 en $z = 0$ y de orden 1 en $z = \frac{1}{3}$. Cero de orden 2 en $z \to \infty$.
   Tiene transformada de Fourier.
   (j) $X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4z}}$, ROC=$\{|z| > 1/2\}$.
   Polos en $z = \frac{1}{4}$ y $z = \frac{1}{2}$. Cero en $z = \frac{3}{8}$.
   Tiene transformada de Fourier.
   (k) $X(z) = 1+(1/7)z^{-1}+(1/7)^2z^{-2}+\cdots+(1/7)^8z^{-8} = \frac{1-7^{-9}z^{-9}}{1-\frac{1}{7}z^{-1}}$, ROC=$\{Z-\{0\}\}$.
   Polo de orden 8 en $z = 0$. Cero de orden 8 en $z \to \infty$.
   Tiene transformada de Fourier.

(l) $X(z) = 1 + 7z^{-1} + 7^2 z^{-2} + \cdots + 7^8 z^{-8} = \frac{1-7^9 z^{-9}}{1-7z^{-1}}$, ROC=$\{Z - \{0\}\}$.
Polo de orden 8 en $z = 0$. Cero de orden 8 en $z \to \infty$.
Tiene transformada de Fourier.

(m) $X(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} + \cdots + \frac{1}{2^9}z^{-9} = \frac{1-2^{-10}z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, ROC=$\{Z - \{0\}\}$.
Polo de orden 9 en $z = 0$. Cero de orden 9 en $z \to \infty$.
Tiene transformada de Fourier.

(n) $X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-9} = \frac{1-z^{-10}}{1-z^{-1}}$, ROC=$\{Z - \{0\}\}$.
Polo de orden 9 en $z = 0$. Cero de orden 9 en $z \to \infty$.
Tiene transformada de Fourier.

3. $|\alpha| = 2$, n_0 arbitrario.

4. (a) $x[n] = 3\delta[n+2] + 5\delta[n] + 3\delta[n-1] - 5\delta[n-2]$
   (b) $x[n] = \left\{2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} u[n-1]$

5. $x[n] = \frac{2}{9}u[n] + \frac{7}{9}(-2)^n u[n]$

6. (a) $x[0] = 1$, $x[1] = \frac{2}{3}$, $x[2] = -\frac{2}{9}$.
   (b) $x[0] = 3$, $x[-1] = -6$, $x[-2] = 18$.

7. ROC $\{|z|\} \geq 1$. Los polos y ceros de $H(z)$ deben encontrarse dentro del círculo unidad.

8. $\Phi_{xx}(z) = X(z)X(\frac{1}{z})$

9. (a) $H(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-z_1 z^{-1}} - \frac{1}{1-z_2 z^{-1}}\right)$, con $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. $H(z)$ tiene dos polos ($z = z_1$ y $z = z_2$) y un cero ($z = 0$). Por ser causal ROC=$\{|z| > z_1\}$.
   (b) $h[n] = \frac{1}{\sqrt{5}}z_1^n u[n] - \frac{1}{\sqrt{5}}z_2^n u[n]$
   (c) $h[n] = -\frac{1}{\sqrt{5}}z_1^n u[-n-1] - \frac{1}{\sqrt{5}}z_2^n u[n]$

10. (a) $a = -\frac{9}{8}$
    (b) $y[n] = -\frac{1}{4}$

11. Causal y estable

12. (a) $x[n] = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
    (b) $x[n] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$
    (c) $x[n] = -2\delta[n] + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
    (d) $x[n] = -2\delta[n] - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$
    (e) $x[n] = 2n(1/2)^n u[n] - (n+1)(1/2)^{n+1}u[n+1]$
    (f) $x[n] = -2n(1/2)^n u[-n-1] + (n+1)(1/2)^{n+1}u[-n-2]$

13. (a) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
    (b) $x[n] = \delta[n] - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$
    (c) $x[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 4\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

14. Similar al 10.43 del Oppenheim (ver solución más abajo). En apartado c.i) polo en $z = 1/2$ c.ii) polos en $z = \frac{1}{1+j\sqrt{3}}$ y $z^* = \frac{1}{1-j\sqrt{3}}$

15. Ver solución de examen de Feb 2007. $H(z) = \frac{1-az^{-1}}{1-bz^{-1}}$, $|z| > b$. Entonces, $h[n] = \delta[n] + (b-a)b^{n-1}u[n-1]$. El sistema es lineal e invariante en el tiempo según el enunciado. Tiene memoria $\forall\ a \neq b$. Es causal $\forall\ a, b$. Es estable si $b > 1$ o si $b = a$. Es invertible con respuesta al impulso del sistema inverso: $h[n] = \delta[n] + (a-b)a^{n-1}u[n-1]$

16. Ver solución detallada en: soluciones de examen de Sept. 2006.

$$y[n] = 8(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} u[n+2] + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] + \frac{16}{3}2^{n+1}u[-n-2]$$

17. (a) Ver solución detallada en: soluciones de examen de Feb. 2006.
    (b) $Y(z)$ converge hacia el exterior de una circunferencia centrada en el origen, en el plano z.
    (c) h[n] ya es causal. Para que sea estable: $\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty$.

18. (a) $y[n] - \frac{7}{4}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2] = x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-2]$
    (b) Ver solución detallada en: soluciones de examen de Sept. 2005.
    (c) $h_1[n] = 4\delta[n] - \frac{14}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
    $h_2[n] = 4\delta[n] + \frac{14}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1] - \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

19. Problemas de ampliación. Del 10.1 al 10.20 la solución está en el libro.

10.25 $x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2u[n]$

10.26 (a) $X(z) = \frac{z^2}{(z-1/2)(z-1)}$
(b) $X(z) = 1 - \frac{1/2}{z-1/2} + \frac{2}{z-1}$
(c) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-2] - 2u[-n-2]$

10.31 $X(z) = \frac{2z^2}{(z-\frac{1}{2}e^{j\pi/3})(z-\frac{1}{2}e^{-j\pi/3})}$, $|z| > \frac{1}{2}$

10.43 (a) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{n} = X\left(\frac{1}{z}\right)$
(b) Si z_0 es un polo, $1/X(z_0) = 0$. Si $X(z) = X\left(\frac{1}{z}\right)$ entonces $1/X(z_0) = 1/X\left(\frac{1}{z_0}\right) = 0$. Esto implica que hay un polo en $1/z_0$.

10.46 (a) $H_1(z) = 1 - z^{-8}e^{-8\alpha} = \frac{z^8 - e^{-8\alpha}}{z^8}$. ROC=$Z - \{0\}$
(b) $H_2(z) = \frac{1}{1-z^{-8}e^{-8\alpha}} = \frac{z^8}{z^8 - e^{-8\alpha}}$.
ROC1=$|z| > e^{\alpha}$. Sistema causal y no estable.
ROC2=$|z| < e^{\alpha}$. Sistema anticausal y estable.
(c) La respuesta causal e inestable: $h_2[n] = \begin{cases} e^{\alpha n} & n = 0, 8, 16, ... \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

La respuesta anticausal y estable: $h_2[n] = \begin{cases} -e^{\alpha n} & n = -8, -16, ... \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

10.56 (a)

$$
\begin{aligned}
X_3(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3[n]z^{-n} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right] z^{-n} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k]z^{-n} \right] = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\mathcal{Z}\{x_2[n-k]\} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\hat{X}_2(z)
\end{aligned}
$$

(b) $\hat{X}_2(z) = z^{-k}X_2(z)$. Sustituyendo en el apartado anterior el resultado es inmediato.

(c) Para demostrarlo, tenga en cuenta que $X_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]z^{-k}$