Procesado con Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo

March 9, 2009

1 Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI)

1.1 Caracterización de los sistemas LTI discretos

- Cualquier señal discreta $x[n]$ puede escribirse en términos de impulsos

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Si un sistema es LTI la respuesta a una entrada $x[n]$ puede escribirse

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

  donde $h[n]$ es la respuesta al impulso del sistema. A esta operación se le conoce como **convolución discreta**.

- La convolución es conmutativa, asociativa y distributiva, y su elemento neutro es la función $\delta[n]$.

1.2 Caracterización de los sistemas LTI continuos

- Cualquier señal continua $x(t)$ puede escribirse en términos de impulsos

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\ d\tau$$

  donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac, que cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ dt = 1$$

- Si un sistema es LTI su respuesta a una entrada $x(t)$ puede escribirse

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\ d\tau$$

  donde $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema. A esta operación se le conoce como **convolución continua**.

- Un sistema LTI también puede caracterizarse mediante la respuesta al escalón $s(t)$:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

1.3 Propiedades de los sistemas LTI

Memoria: Si $h(t) = K\delta(t)$ el sistema es sin memoria.

Causalidad: Si $h(t) = 0\ \forall t < 0$ el sistema es causal. Si $h(t) = 0\ \forall t \geq 0$ el sistema es anticausal.

Invertibilidad: Se define la respuesta al impulso del sistema inverso $h_i(t)$ como $h(t) * h_i(t) = \delta(t)$.

Estabilidad: Si $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\ d\tau < \infty$ el sistema es estable.

1.4 Sistemas descritos mediante ecuaciones en diferencias y diferenciales

- Un sistema discreto descrito mediante una ecuación en diferencias con coeficientes constantes

$$\sum_{i=0}^{N} a_i\ y[n-i] = \sum_{k=0}^{M} b_k\ x[n-k]$$

  es un sistema LTI si imponemos como condiciones iniciales causalidad (o reposo inicial: $y[n] = 0\ \forall n < 0$).

- Un sistema continuo puede definirse mediante una ecuación diferencial con coeficientes constantes:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i\ \frac{d^{i)} y(t)}{dt^i} = \sum_{k=0}^{M} b_k\ \frac{d^{k)} x(t)}{dt^k}$$

1.5 Propiedades de la función $\delta(t)$ (resumen)

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ dt = 1$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\ dt = f(t_0)$
3. $\delta(t-t_0) * x(t) = x(t-t_0)$
4. $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$
5. $a\delta(t) + b\delta(t) = (a+b)\delta(t)$
6. $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$
7. $\delta(-t) = \delta(t)$
8. $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\ d\tau = u(t)$
9. $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$

2 Análisis de Fourier de Señales Continuas

2.1 Señales exponenciales. Autofunciones

- Las exponenciales son autosoluciones de los sistemas LTI:

$$e^{st} * h(t) = H(s)e^{st}$$

con

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

2.2 Representación de señales periódicas. La serie de Fourier

- Dos señales periódicas están **armónicamente relacionadas** cuando tienen un periodo común:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in Q$$

- Una señal periódica $x(t)$ de periodo T va a poderse escribir como una combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas: Serie de Fourier:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \text{ (Ecuación de análisis)}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \text{ (Ecuación de síntesis)}$$

- Si la señal $x(t)$ es real, los coeficientes cumplen la siguiente relación

$$c_k = c_k^*$$

y la serie se puede escribir como una suma de senos y cosenos ($c_k = a_k + jb_k$):

$$x(t) = c_0 + 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\frac{2\pi}{T}t) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\frac{2\pi}{T}t)\right)$$

o como una suma de cosenos ($c_k = r_k e^{j\theta_k}$):

$$x(t) = c_0 + 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos(k\frac{2\pi}{T}t + \theta_k)\right)$$

- Una serie de Fourier converge si $|x(t)|^2$ es integrable en un periodo. De manera más general, aplicaremos las condiciones de Dirichlet.

2.3 La transformada de Fourier

- la transformada de Fourier permite la representación de la información de una señal en el dominio de la frecuencia. La definimos:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \text{ (Ecuación de análisis)}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \text{ (Ecuación de síntesis)}$$

- La transformada de Fourier converge si $|x(t)|^2$ es integrable (energía finita). De manera más general, aplicaremos las condiciones de Dirichlet.

- la transformada de Fourier de una señal periódica se hace a partir de su Serie de Fourier. La TF de una exponencial es:

$$e^{j\omega_0 t} \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

  y la TF de una señal periódica será

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 X_c(k\omega_0)\delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

  siendo $X_c(\omega)$ la TF de la señal aperiódica.

2.4 Sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales

Dada una ecuación diferencial

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^{k)}y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^{k)}x(t)}{dt^k}$$

que describe un sistema LTI, su transformada de Fourier es de la forma

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k\right) Y(\omega) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k\right) X(\omega)$$

y la respuesta al impulso puede calcularse

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k} = H_1(\omega)H_2(\omega)\cdots H_p(\omega)$$

3 Análisis de Fourier de Señales Discretas

3.1 Señales exponenciales. Autofunciones

- Las exponenciales son autosoluciones de los sistemas LTI discretos:

$$z^n * h[n] = H(z)z^n$$

  con

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

- Concretamente para $z = e^{j\Omega}$

$$e^{j\Omega n} * h[n] = H(\Omega)e^{j\Omega n}$$

Propiedad	Señal Aperiódica	Transformada de Fourier
Linealidad	$ax(t)+by(t)$	$aX(\omega)+bY(\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega-\omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Inversión temporal	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Escalado	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Convolución	$x(t)*y(t)$	$X(\omega)Y(\omega)$
Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega)*Y(\omega)$
Diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$
Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$

Relación de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2d\omega$$

Table 1: Propiedades de la Transformada de Fourier

Propiedad	Señal periódica	Coef. Serie de Fourier
	$\left.\begin{array}{c}x(t)\\y(t)\end{array}\right\}$ Periodo T ($\omega_0=\frac{2\pi}{T}$)	a_k b_k
Linealidad	$Ax(t)+By(t)$	Aa_k+Bb_k
Desplazamiento temporal	$x(t-t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{jM\omega_0 t}x(t)$	a_{k-M}
Conjugación	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Escalado temporal	$x(\alpha t)$, $\alpha>0$ Periódica con periodo T/α	a_k
Convolución Periódica	$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	Ta_kb_k
Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}a_lb_{k-l}$
Diferenciación	$\frac{d}{dt}x(t)$	$jk\omega_0 a_k$
Integración	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$ (Finita y periódica sólo si $a_0=0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k$
Simetría Conjugada	$x(t)$ real	$a_k=a^*_{-k}$

Relación de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_T|x(t)|^2dt=\sum_{-\infty}^{+\infty}|a_k|^2$$

Table 2: Propiedades de la Serie Continua de Fourier

3.2 La serie discreta de Fourier

- Una señal periódica $x[n]$ de periodo N va a poderse escribir como una combinación lineal de N exponenciales complejas armónicamente relacionadas (Serie Discreta de Fourier):

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \text{ (Ecuación de análisis)}$$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \text{ (Ecuación de síntesis)}$$

3.3 La transformada de Fourier de tiempo discreto

- la transformada de Fourier permite la representación de la información de una señal discreta en el dominio de la frecuencia (continua). La definimos:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \text{ (Ecuación de análisis)}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \text{ (Ecuación de síntesis)}$$

- La transformada de Fourier de tiempo discreto es una señal periódica de periodo 2π:

$$X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$$

- Es aplicable a señales de registro finito que cumplan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

- la transformada de Fourier de una señal periódica se hace a partir de su Serie de Fourier. La TF de una exponencial es:

$$e^{j\Omega_0 n} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta_p(\Omega - \Omega_0)$$

  y la TF de una señal periódica será

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta_p(\Omega - k\frac{2\pi}{N})$$

  siendo $\delta_p(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$

- No hay que confundir la transformada de Fourier de tiempo discreto con la transformada discreta de Fourier (DCT).

Propiedad	**Señal Aperiódica**	**Transformada de Fourier**
Linealidad	$ax[n] + by[n]$	$aX(\Omega) + bY(\Omega)$
Desplazamiento temporal	$x[n - n_0]$	$e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\Omega_0 n} x[n]$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
Inversión temporal	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
Expansión en tiempo	$x_{(k)}[n]$	$X(k\Omega)$
Convolución	$x[n] * y[n]$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
Multiplicación	$x[n]y[n]$	$X(\Omega) \circledast Y(\Omega)$
Diferenciación en tiempo	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} X(\Omega) + \pi X(0)\delta_p(\Omega)$
Diferenciación en frecuencia	$nx[n]$	$j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Relación de Parseval		

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Table 3: Propiedades de la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

3.4 Sistemas descritos mediante ecuaciones en diferencias

Dada una ecuación en diferencias con coeficientes constantes

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \ y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \ x[n-k]$$

que describe un sistema LTI, su transformada de Fourier es de la forma

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega} \right) Y(\Omega) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega} \right) X(\Omega)$$

y la respuesta al impulso puede calcularse

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}}$$

Propiedad	**Señal periódica**	**Coef. Serie de Fourier**
	$\left.\begin{matrix} x[n] \\ y[n] \end{matrix}\right\}$ Periodo N ($\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$)	$\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\}$ Periodo N
Linealidad	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Desplazamiento temporal	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{jM(2\pi/N)n} x[n]$	a_{k-M}
Conjugación	$x^*[n]$	a^*_{-k}
Inversión de tiempo	$x[-n]$	a_{-k}
Escalado temporal	$x_{(m)}[n]$ (Periódica de periodo mN)	$\frac{1}{m} a_k$
Convolución Periódica	$\sum_{r=<N>} x[r]y[n-r]$	$N a_k b_k$
Multiplicación	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=<N>} a_l b_{k-l}$
Diferenciación	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)}) a_k$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ (Finita y periódica sólo si $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{(1 - e^{-jk(2\pi/N)})}\right) a_k$
Simetría Conjugada	$x[n]$ real	$a_k = a^*_{-k}$
Relación de Parseval	$\frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \lvert x[n]\rvert^2 = \sum_{k=<N>} \lvert a_k\rvert^2$	

Table 4: Propiedades de la Serie Discreta de Fourier

4 Muestreo

4.1 Muestreo y teorema del muestreo

- Para muestrear una señal continua $x(t)$ la multiplicamos por un tren de impulsos $p(t)$.

$$\begin{aligned} x_p(t) &= x(t)p(t) \\ &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - kT_s) \end{aligned}$$

siendo T_s el periodo de muestreo.

- Posteriormente pasamos la señal por un conversor C/D que convierte las deltas continuas en deltas discretas.

- En frecuencia es equivalente a

$$\begin{aligned} X_p(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * P(\omega)\right] \\ &= \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \end{aligned}$$

con $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$. (La señal se duplica en múltiplos enteros de la frecuancia de muestreo).

- **Teorema del Muestreo (de Nyquist):** Dada una señal $x(t)$ de banda limitada ($X(\omega) = 0\ \forall\omega > \omega_M$) la señal podrá ser reconstruida tras ser muestreada si $\omega_s > 2\omega_M$.

4.2 Interpolación

- Para recuperar la señal continua filtramos la señal muestreada con un filtro pasobajo de ganancia T_s y frecuencia de corte $\omega_s/2$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h(t - kT_s)$$

El filtro en el dominio temporal será:

$$h(t) = \mathrm{sinc}(t/T_s)$$

4.3 Procesado Discreto de Señales Continuas

- Relación de Transformadas de Fourier:

$$x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

$$x_p(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X_p(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_k X(\omega - k\omega_s)$$

$$x_d[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X_d(\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_k X\left(\frac{\Omega - k2\pi}{T_s}\right)$$

- Procesado discreto de señales continuas: Relación entre respuestas al impulso:

$$H_c(\omega) = \begin{cases} H(\omega T) & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases}$$

o visto de otro modo $H(\Omega) = H_c(\Omega/T)$entre $-\pi$ y π.

5 La Transformada Z

5.1 La transformada Z

- Señales exponenciales discretas de la forma z^n con $z = re^{j\Omega}$ son autosoluciones de los sistemas LTI. Para una entrada $x[n] = z^n$ la salida será

$$y[n] = z^n H(z)$$

Siendo $H(z)$ la transformada Z de $h[n]$ evaluada en el punto z.

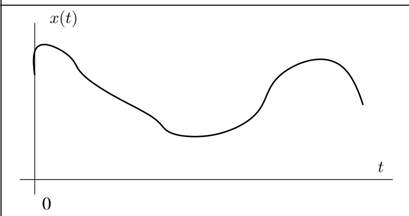
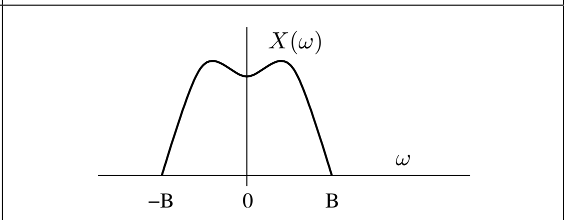
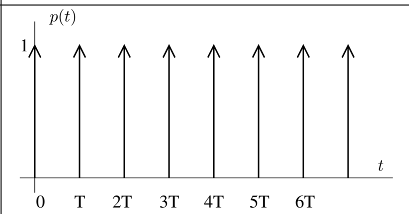
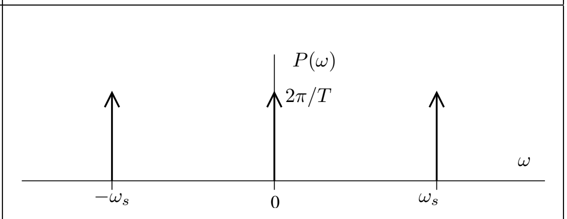
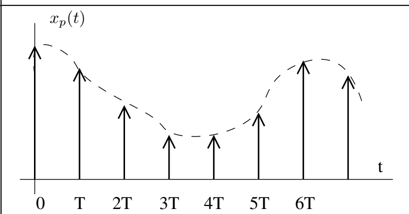
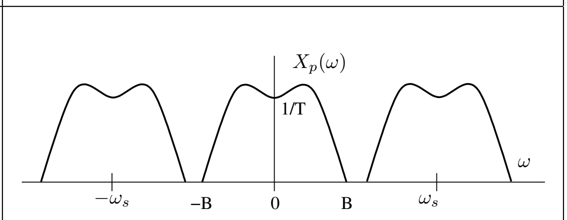
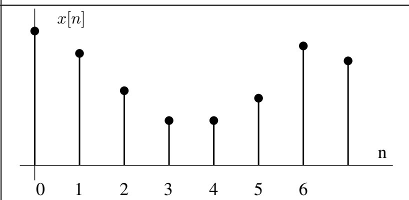
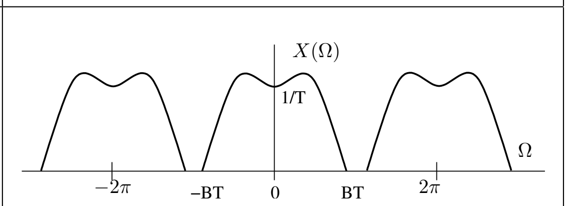
Señal	Dominio temporal	Dominio frecuencial
$x(t)$		
$p(t)$		
$x_p(t)$		
$x[n]$		

Table 5: Resumen de un proceso de muestreo en tiempo y frecuencia

- Transformada Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- Relación con transformada de Fourier

$$X(\Omega) = X(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

$$X(z) = \mathfrak{F}\{x[n]r^{-n}\}$$

5.2 Regiones de convergencia

- Convergencia depende de r:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|r^{-n} < \infty$$

- Propiedades de la ROC:
  1. Anillos centrados en el origen.
  2. No contiene polos.
  3. Si $x[n]$ es de duración finita: converge en todo el plano.
  4. Si $x[n]$ es derecha converge hacia afuera.
  5. Si $x[n]$ es izquierda converge hacia dentro.
  6. Si $x[n]$ es bilateral converge hacia en un anillo.

  (Cuidado con los puntos 0 e ∞).

5.3 La transformada inversa

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_r X(z)z^{n-1}dz$$

5.4 Propiedades de la Transformada Z

Propiedad	Señal	Transformada Z	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en n	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R \pm \{0\}$
Escalado en z	$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\Omega_0 n}z)$	R
	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R$
	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	$\|a\|R$ (El conjunto de puntos $\{\|a\|z\}$ para z en R)
Inversión en n	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	R^{-1} (el conjunto de puntos z^{-1} donde z está en R)
Expansión en n	$x_{(k)}[n]$	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (el conjunto de puntos $z^{1/k}$ donde z está en R)
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Primera diferencia	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	Al menos $R \cap (\|z\| > 0)$
Acumulación	$\sum\limits_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	Al menos $R \cap (\|z\| > 1)$
Diferenciación en z	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	R

Teorema del valor inicial

Si $x[n] = 0$ para $n < 0$ entonces $x[0] = \lim\limits_{z \to \infty} X(z)$

5.5 Análisis y caracterización de sistemas LTI usando la Transformada Z

- En los puntos en que $r = 1$ se cumple que $X(z)$=$X(\Omega)$.
- Si el círculo unidad está en la ROC el sistema es estable (y $h[n]$ tiene transformada de Fourier).
- Si $h[n]$ es causal: ROC hacia la afuera.
- Si $h[n]$ es anticausal: ROC hacia dentro.
- Sistemas descritos mediante ecuaciones en diferencias:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\ y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\ x[n-k] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right) X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

6 La Transformada de Laplace

6.1 La transformada de Laplace

- Señales exponenciales de la forma e^{st} con $s = \sigma + j\omega$ son autosoluciones de los sistemas LTI. Para una entrada $x(t) = e^{st}$ la salida será

  $$y(t) = e^{st}H(s)$$

  Siendo $H(s)$ la transformada de Laplace de $h(t)$ evaluada en el punto s.

- Transformada de Laplace:

  $$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- Relación con transformada de Fourier

  $$X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$$

  $$X(s) = \mathfrak{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

6.2 Regiones de convergencia

- Convergencia depende de σ:

  $$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t}dt < \infty$$

- Propiedades de la ROC:

  1. Bandas paralelas en plano s.
  2. No contiene polos.
  3. Si $x(t)$ es de duración finita: converge en todo el plano.
  4. Si $x(t)$ es derecha converge hacia la derecha.
  5. Si $x(t)$ es izquierda converge hacia la izquierda.
  6. Si $x(t)$ es bilateral converge hacia en una banda.

  (Cuidado con los puntos $-\infty$ e $+\infty$).

6.3 La transformada inversa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

6.4 Propiedades de la Transformada de Laplace

Propiedad	**Señal**	**T. de Laplace**	**ROC**
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linealidad	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(s)+bX_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en tiempo	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
Desplazemiento en s	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s-s_0)$	R desplazada (s en ROC si $s-s_0$ en R)
Escalado en tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{s}{a}\right)$	R escalada (s en ROC si s/a en R)
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
Convolución	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	Al menos R
Diferenciación en s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
Integración en tiempo	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	Al menos $R \cap \{\Re\{s\}>0\}$

Teoremas del valor inicial y final

Si $x(t)=0$ para $t<0$ y x(t) no contiene impulsos o funciones singulares de orden superior en $t=0$, entonces

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

6.5 Análisis y caracterización de sistemas LTI usando la Transformada de Laplace

- En los puntos en que $\sigma=0$ se cumple que $X(s)$=$X(\omega)$.
- Si el eje $j\omega$ está en la ROC el sistema es estable (y $h(t)$ tiene transformada de Fourier).
- Si $h(t)$ es causal: ROC hacia la derecha.
- Si $h(t)$ es anticausal: ROC hacia la izquierda.
- Sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^{i)}y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{M} b_i \frac{d^{i)}x(t)}{dt^i} \xleftrightarrow{\mathfrak{L}} \left(\sum_{i=0}^{N} a_i s^i\right) Y(s) = \left(\sum_{i=0}^{M} b_i s^i\right) X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}$$