Procesado Lineal Bidimensional

Santiago Aja-Fernández

Universidad de Valladolid

Contenidos

Representacion de imágenes

Señales 2D

- Imágenes como señales 2D
- Continua $f(x, y)$: aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^N$
- Discreta $f[m, n]$: aplicación $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^N$
- $\widehat{f}[m, n]$: Señal discreta cuantificada

Notación

- Símbolos: x, y, z, u, v Coordinadas espaciales continuas
- Símbolos: n, m, r, s, i, j, k Coordinadas espaciales discretas

Señales de interés

Impulsos unitarios

- Discreto

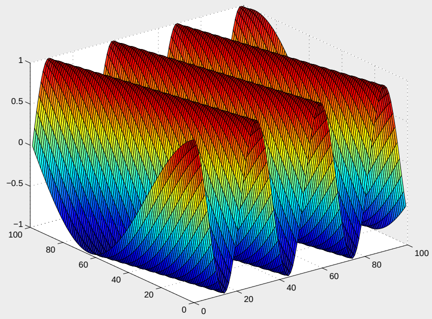
$$\delta[m, n] = \begin{cases} 1 & n = m = 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

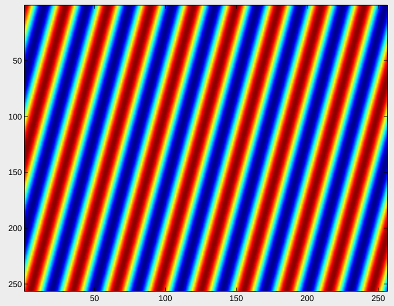
- Continuo $\delta(x, y)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dxdy = 1$$

- Propiedad: $\int \int f(x, y)\delta(x - x_0, y - y_0)dxdy = f(x_0, y_0)$
- Señal separable si $f(x, y) = f_x(x)f_y(y)$

$$\delta[m, n] = \delta[m]\delta[n] \quad \delta(x, y) = \delta(x)\delta(y)?$$





Exponencial

$$f(x,y) = Ke^{s_1 x + s_2 y} \qquad f[m,n] = K z_1^m z_2^n$$

- Continua $f(x,y) = K\ e^{j\omega_1 x + j\omega_2 y}$.
  Señal periódica.
- Discreta $f[m,n] = K\ e^{j\Omega_1 m + j\Omega_2 n}$.
  Señal peródica si

$$\frac{2\pi}{\Omega_1} \in \mathbb{Q} \qquad \frac{2\pi}{\Omega_2} \in \mathbb{Q}$$

Respuesta al sistema

f(x,y) → LTI → g(x,y)

- Respuesta de un sistema $g[m,n] = H\left(f[m,n]\right)$
- Propiedades de Linealidad e invarianza espacial.
- Respuesta al impulso

$$h[m,n;m',n'] = H\left(\delta[m,n]\right) \quad h(x,y;x',y') = H\left(\delta(x,y)\right)$$

Sistemas Lineales e Invariantes (LSI)

Sistemas LSI

$$
\begin{aligned}
g[m,n] &= \sum_{m'}\sum_{n'} f[m',n']h[m-m',n-n'] \\
&= f[m,n] * h[m,n] \\
g(x,y) &= \int_{x'}\int_{y'} f(x',y')h(x-x',y-y')dx'dy' \\
&= f(x,y) * h(x,y)
\end{aligned}
$$

Convolución

Propiedades de la convolución

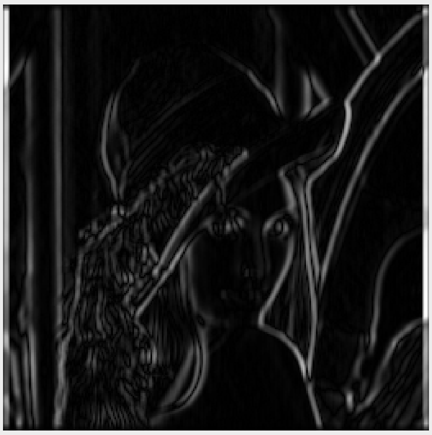
Propiedades

- Conmutatividad: $f(x,y) * h(x,y) = h(x,y) * f(x,y)$
- Asociatividad
- Distributividad
- Estabilidad

$$\sum_m \sum_n |h[m,n]| < \infty \qquad \int_x \int_y |h(x,y)|dxdy < \infty$$

- Separabilidad
- Causalidad

Ejemplos de convolución

Transformada de Fourier 2D

Señales continuas

Representación de las señales en el dominio de las frecuencias espaciales.

$$F(\xi_1,\xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(\xi_1 x+\xi_2 y)}dxdy$$
$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi_1,\xi_2)e^{j2\pi(\xi_1 x+\xi_2 y)}d\xi_1 d\xi_2$$

Eterno problema con $\omega_i = 2\pi\xi_i$

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1,\omega_2)e^{j(\omega_1 x+\omega_2 y)}d\omega_1 d\omega_2$$

Propiedades de la TF 2D

Propiedades

- Frecuencias espaciales: ciclos por unidad espacial
- Unicidad
- Separabilidad (kernel separable).

$$F(\xi_1,\xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi\xi_2 y}dy\right]e^{-j2\pi\xi_1 x}dx$$

- Exponenciales complejas son **autofunciones** de los sitemas LSI.

$$g(x,y) = e^{j2\pi(\xi_1 x+\xi_2 y)}H(\xi_1,\xi_2)$$

Propiedades de la TF 2D

Propiedades

- Convolución

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} G(\xi_1,\xi_2) = F(\xi_1,\xi_2)H(\xi_1,\xi_2)$$

- Correlación cruzada

$$c(x,y) = \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} G(\xi_1,\xi_2) = F(\xi_1,\xi_2)H^*(\xi_1,\xi_2)$$

- Autocorrelación y densidad de energía

$$\begin{aligned} R_f(x,y) &= \int\int f(x',y')f(x+x',y+y')dx'dy' \\ S_f(\xi_1,\xi_2) &= \mathfrak{F}\left[R_f(x,y)\right] = |F(\xi_1,\xi_2)|^2 \end{aligned}$$

Propiedades de la TF 2D

TF Rotaciones

- TF en polares

$$\begin{aligned} F_p(\xi,\phi) &= \int\int f(x,y)e^{-j2\pi(\xi\cos\phi x+\xi\sin\phi y)}dxdy \\ &= \int\int f_p(\rho,\theta)e^{-j2\pi(\xi\cos\phi\rho\cos\theta+\xi\sin\phi\rho\sin\theta)}\rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

- Se puede demostrar que

$$\mathfrak{F}\left[f_p(\rho,\theta+\alpha)\right] = F_p(\xi,\phi+\alpha)$$

Transformada de Fourier 2D

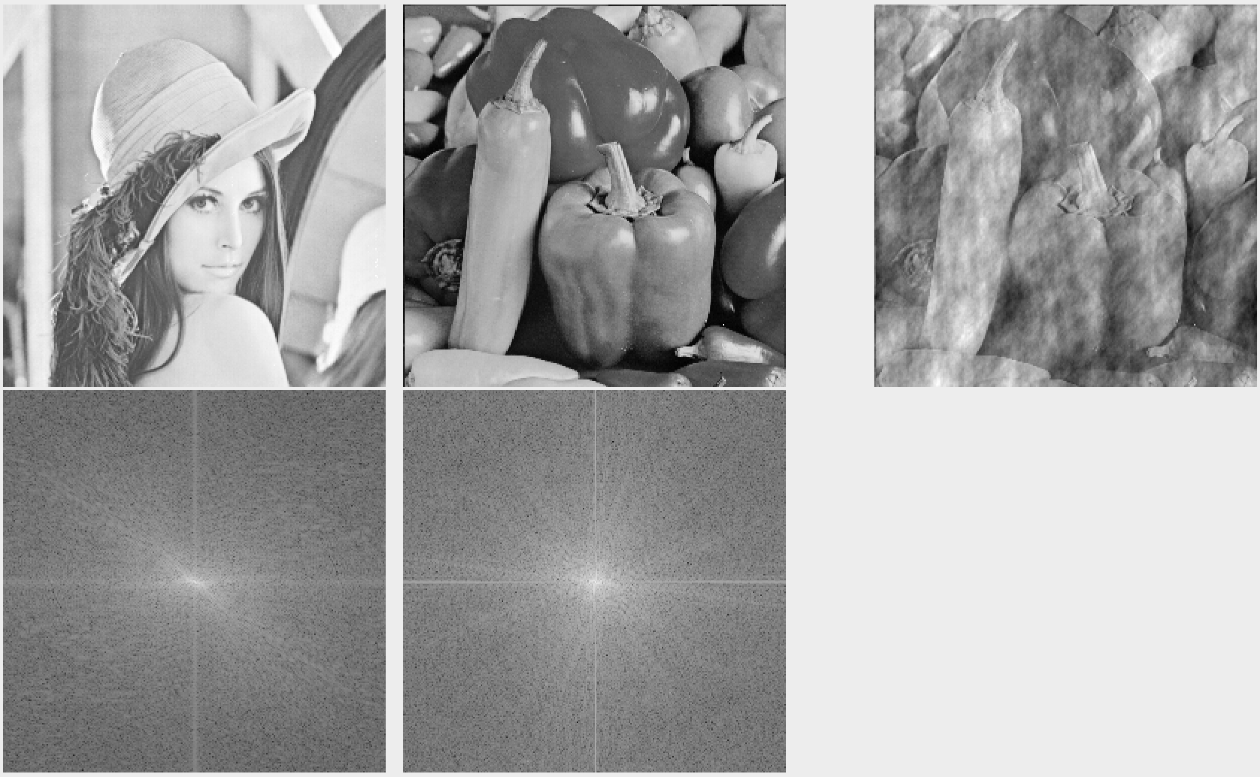
Señales discretas

Transformada de Fourier (continua) de señales discretas

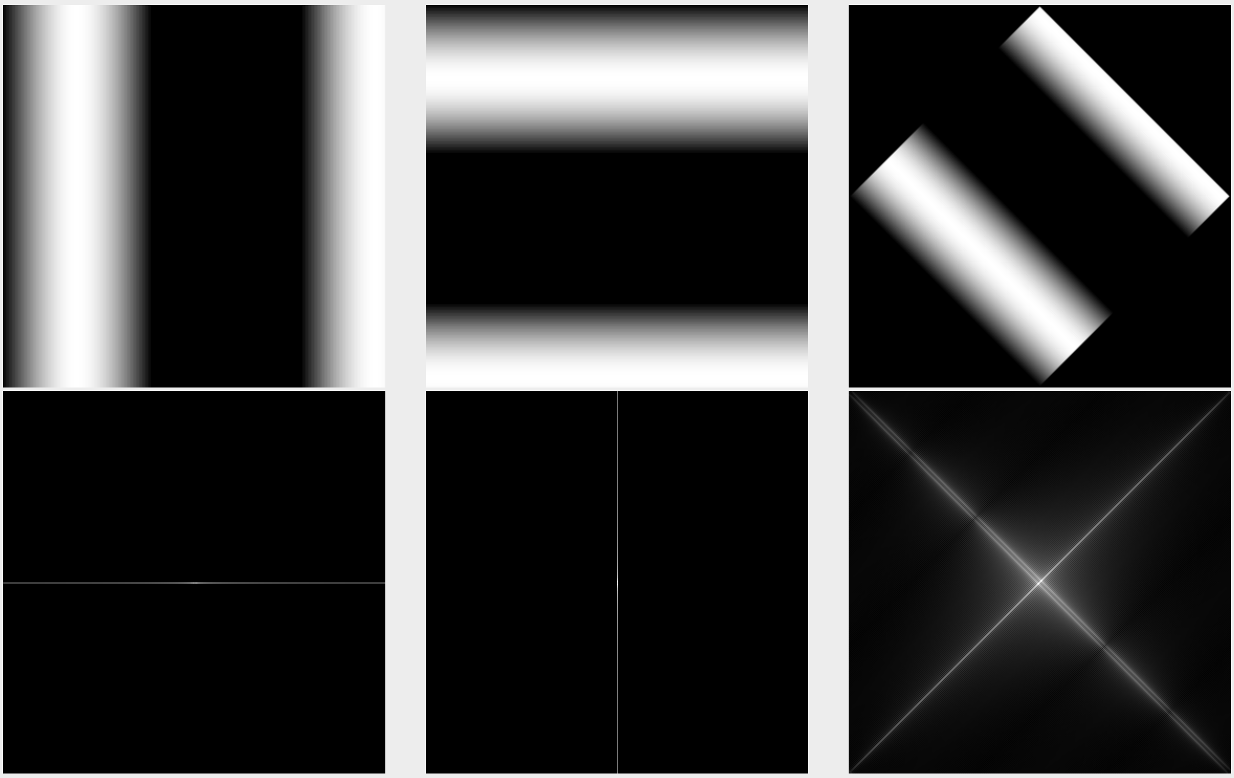
$$\begin{aligned} F(\Omega_1,\Omega_2) &= \sum_m\sum_n f[m,n]e^{-j(\Omega_1 m+\Omega_2 n)} \\ x[m,n] &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\Omega_1,\Omega_2)e^{j(\Omega_1 m+\Omega_2 n)}d\Omega_1 d\Omega_2 \end{aligned}$$

Solución computacional: DFT

Ejemplos de transformada de Fourier



Ejemplos de transformada de Fourier



Transformada Discreta de Fourier

DFT de una secuencia (1D)

$$v[k] = \sum_{n=0}^{N-1} u[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, \cdots, N-1$$

$$u[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} v[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, \cdots, N-1$$

. Referencia: Lim: Two-dimensional signal and image processing.

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier

1. Extensión periódica:

$$u[n+N] = u[n] \quad v[k+N] = v[k]$$

2. DFT: Muestreo de la TF de una señal discreta.

$$\left.\begin{array}{l} u[n] \overset{\mathcal{TF}}{\longleftrightarrow} U(\Omega) \\ u[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} v[k] \end{array}\right\} v[k] = U\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$$

3. Relación DFT con Series de Fourier.
4. Implementación con algoritmos rápidos: FFT, $\mathcal{O}(N \log_2 N)$.
5. Simetría conjugada en torno a $N/2$: $X[N-k] = X^*[k]$.

Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier

6. Convolución (circular):

$$x_1[n] \circledast x_2[n] \stackrel{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} X_1[k]X_2[k]$$

7. Multiplicación:

$$x_1[n]x_2[n] \stackrel{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N^2}X_1[k] \circledast X_2[k]$$

Transformada Discreta de Fourier

DFT de una imagen (2D)

$$\begin{aligned} X[k_1,k_2] &= \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x[m,n]e^{-j\frac{2\pi}{N}(k_1 m+k_2 n)} \\ x[m,n] &= \frac{1}{N^2}\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1} X[k_1,k_2]e^{j\frac{2\pi}{N}(k_1 m+k_2 n)} \end{aligned}$$

Propiedades de la DFT 2D

1. Extensión periódica:

$$X[k_1 + N, k_2 + N] = X[k_1, k_2]$$

2. DFT: Muestreo de la TF de una señal discreta.
3. Implementación con algoritmos rápidos: FFT, $\mathcal{O}(N^2 \log_2 N)$.
4. Simetría conjugada:

$$X[k_1, k_2] = X^*[N - k_1, N - k_2]$$

Comentarios

Sistemas LSI

- Queremos transformaciones $N \times N \rightarrow N \times N$
- Sistemas LSI: no lo cumplen
  $(N \times N) * (M \times M) \rightarrow (N + M - 1) \times (N + M - 1)$
- Sistemas LCI: lineales y circularmente invariantes. (Convolución circular).
- Salida de un sistema LCI:

$$g[m, n] = f[m, n] \circledast h[m, n]$$

- Respuesta a exponencial compleja:

$$g[m, n] = H[k_1, k_2] e^{j\frac{2\pi}{N}(k_1 m + k_2 n)}$$

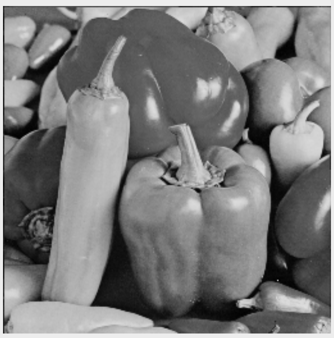
Comentarios (2)

DFT y operaciones

- Convolución: $\mathcal{O}(N^4)$
- Convolución vía DFT: $\mathcal{O}(N^3)$
- Convolución vía FFT: $\mathcal{O}(N^2 log_2 N)$
- Equivalencia filtrado en dominio espacial y transformado.

Sin embargo hay otras transformadas mejores que la DFT para hacer procesado lineal: Transformadas Unitarias.

Problema de la DFT



Transformadas Unitarias

- Usamos familia de señales ortogonales que no sean las exponenciales complejas

$$
\begin{aligned}
F[k_1, k_2] &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m, n] a_{k_1,k_2}[m, n] \\
f[m, n] &= \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} F[k_1, k_2] a^*{}_{k_1,k_2}[m, n]
\end{aligned}
$$

- $a_{k_1,k_2}[m, n]$ familia de funciones ortonormales.

$$
\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k_1,k_2}[m, n] a^*_{k_1',k_2'}[m, n] = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & k_i \neq k_i' \\ 1 & k_i = k_i' \end{array} \right.
$$

Transformadas Unitarias

- Ortonormalidad

$$
\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k_1,k_2}[m, n] a^*_{k_1',k_2'}[m, n] = \delta[k_1 - k_1', k_2 - k_2']
$$

- Completitud.

$$
\sum_{k_1} \sum_{k_2} a_{k_1,k_2}[m, n] a^*_{k_1,k_2}[m', n'] = \delta[m - m', n - n']
$$

Transformadas Unitarias

Principales Transformadas Unitarias

- DFT
- Transformada del coseno y del seno
- Transformadas de Hadamard / Walsh
- Transformada de Haar
- T. de Slant
- T. de Karhunen-Loeve

- Todas menos la última tienen transformada rápida

Transformada Discreta del Coseno

Equivalente a DFT de imagen $2N \times 2N$.

Transformada Discreta del Coseno

DCT de una imagen

- Equivalente a

$$\mathrm{DCT}\{f[m,n]\} = \mathrm{DFT}\{f_e[m,n]\}$$

$$\begin{aligned} F[k_1,k_2] &= \frac{1}{2N}\sum_{m=0}^{2N-1}\sum_{n=0}^{2N-1} f_e[m,n]e^{-j\frac{2\pi}{2N}(k_1 m + k_2 n)} \\ &= \frac{2}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} f[m,n]\cos\left(\frac{k_1\pi}{2N}(2m+1)\right) \\ &\quad \cos\left(\frac{k_2\pi}{2N}(2n+1)\right) e^{j(\dots)} \end{aligned}$$

Transformada Discreta del Coseno

DCT de una imagen

$$\begin{aligned} F[k_1,k_2] &= \frac{2C(k_1)C(k_2)}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} f[m,n]\cos\left(\frac{k_1\pi}{N}(m+\frac{1}{2})\right) \\ &\quad \cos\left(\frac{k_2\pi}{N}(2n+\frac{1}{2})\right) \\ f[m,m] &= \frac{2C(k_1)C(k_2)}{N}\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1} F[k_1,k_2]\cos\left(\frac{k_1\pi}{N}(m+\frac{1}{2})\right) \\ &\quad \cos\left(\frac{k_2\pi}{N}(2n+\frac{1}{2})\right) \\ a_{k_1,k_2}[m,n] &= \frac{2}{N}\cos\left(\frac{k_1\pi}{N}(m+\frac{1}{2})\right)\cos\left(\frac{k_2\pi}{N}(2n+\frac{1}{2})\right) \end{aligned}$$

Otras Transformadas

Transformada de Karhunen-Loeve

- Conocida como Trasformación de autovectores.
- No tiene FFT. Transformada rápida: Singular Value Decomposition (SVD)

$$\mathbf{X} = \mathbf{USV}^T$$

U y **V** matrices unitarias, **S** diagonal.