



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE
INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN

TRABAJO FIN DE MASTER

MASTER UNIVERSITARIO

INGENIERO DE TELECOMUNICACIÓN

**Desarrollo de técnicas de estimación de
ruido no estacionario y filtrado en
tomografía pulmonar**

Autor:

Alejandro Escudero Vega

Tutores:

**Dr. Gonzalo Vegas Sánchez-Ferrero
Dr. Santiago Aja Fernández**

Valladolid, 13 de julio de 2016

TÍTULO: Desarrollo de técnicas de estimación de ruido no estacionario y filtrado en tomografía pulmonar

AUTOR: Alejandro Escudero Vega

TUTORES: Dr. Gonzalo Vegas Sánchez-Ferrero
Dr. Santiago Aja Fernández

DEPARTAMENTO: Teoría de la Señal y Comunicaciones e Ingeniería Telemática

Tribunal

PRESIDENTE: Dr. Marcos Martín Fernández

VOCAL: Dr. Luis Miguel San José Revuelta

SECRETARIO: Dr. Juan Ignacio Arribas Sánchez

FECHA: 13 de julio de 2016

CALIFICACIÓN:

Resumen

El empleo de la tomografía computerizada en la formación de imágenes médicas ha experimentado un crecimiento importante en las últimas décadas. Concretamente, es una tecnología muy utilizada en la formación de imágenes pulmonares, dado que la instrumentación ha mejorado considerablemente en los últimos años incrementando la rapidez y la precisión. No obstante, una de las limitaciones más importantes que afectan al diagnóstico basado en esta tecnología es la aparición de un ruido no estacionario en la imagen durante su proceso de formación, debido a la influencia de la anatomía en el ruido de la imagen. Este ruido, por tanto, dificulta la correcta visualización del tejido pulmonar y con ello la comparación clínica de imágenes, lo que motiva el desarrollo de un método eficaz para eliminarlo. En este trabajo se propone un modelo probabilístico basado en una mezcla de variables aleatorias Gamma para describir el ruido presente en la imagen. A continuación, se demuestra la idoneidad de dicho modelo para caracterizar la distribución real presente en la imagen mediante métricas de error, comparándolo con otros esquemas. Posteriormente, se emplea una transformación para estabilizar la varianza del ruido y se proponen dos esquemas de filtrado que lo eliminan de forma exitosa. Los resultados tras el filtrado demuestran la efectividad del método propuesto.

Palabras clave

tomografía, computerizada, *backprojections*, ruido, no estacionario, Gamma, algoritmo EM, estabilización, varianza, filtrado, *non-local means*, BM3D.

Abstract

Computerized tomography is a technique whose use has increased in the last decades since it allows the formation of medical images in a fast and precise way. In the field of pulmonary diagnosis, it provides images from patients for their later follow-up. However, due to the influence of the anatomical structures in the image reconstruction, a non-stationary noise, i.e. a noise whose variance changes spatially, arises in the image. This noise may lead to wrong interpretations of the tissues shown in the image, making difficult to detect abnormalities such as emphysema or even tumors. In this context, a balance of the noise variance is appealing. In this work, we propose a method which filters the noise from the image. First, we characterize the noise distribution in the image by a Gamma mixture model. Then, we propose a variance stabilization which makes the noise more tractable in terms of filtering. Finally, we remove the noise with two suitable filters: the non-local means approach and the BM3D. Numerical and visual analyses confirm the robustness of our denoising proposal, showing a better performance in the case of the BM3D.

Keywords

tomography, computerized, backprojections, non-stationary, noise, Gamma, EM algorithm, stabilization, variance, filtering, non-local means, BM3D.

Agradecimientos

Seis años en la Universidad dan para mucho. En primer lugar, me gustaría agradecer a la ETSIT por la formación que he recibido durante esta etapa de Grado y Máster no sólo por las materias impartidas sino también por los valores que he aprendido, como el trabajo en equipo, el esfuerzo, el compañerismo y la responsabilidad. Gracias a todos los profesores por ayudarme a crecer como persona.

Por otro lado, me gustaría dar las gracias a Santiago Aja por darme la oportunidad de realizar el Trabajo Fin de Máster con el Laboratorio de Procesado de Imagen de la ETSIT. Por supuesto, muchas gracias, Gonzalo, por guiarme durante la realización del proyecto pero también por tus consejos acerca de cómo afrontar mi futuro profesional.

Y, finalmente, quiero agradecer a toda mi familia por la educación que he recibido desde que nací. Gracias al apoyo y la comprensión de mis padres y mi hermano, pues sin ellos no habría logrado alcanzar mis metas personales y esto es algo a lo que estaré eternamente agradecido. Asimismo, me gustaría dar las gracias a mi tío Andrés por sus consejos y su ayuda durante mis estudios universitarios. Y quiero hacer una mención especial a mi abuelo Andrés, gracias por enseñarme a pensar y por aportarme una buena base matemática que me ha permitido estudiar una Ingeniería.

A mis padres.

“The important thing is not to stop questioning”.

Albert Einstein

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Materiales	2
1.4. Fases y métodos	2
1.5. Estructura	4
2. Los rayos X como base de la tomografía axial computerizada	5
2.1. Fundamentos teóricos	5
2.1.1. Generación y propiedades de los rayos X	5
2.1.2. Interacción de los rayos X con la materia	8
2.2. Formación de la imagen de tomografía	11
2.2.1. Coeficientes de atenuación lineal	11
2.2.2. Estimación de la atenuación en condiciones no ideales	12
2.2.3. Geometría de muestreo	14
2.2.4. Filtro de <i>backprojection</i>	16
2.2.5. El algoritmo de reconstrucción iterativa	24
2.3. Presentación de la imagen	25
2.3.1. Visualización de la imagen de CT	25
2.3.2. Visualización de volumen	27
2.4. Modelo de ruido en tomografía	29
2.4.1. Ruido de Poisson compuesto	29
3. Estimación probabilística de los distintos tejidos en imágenes TAC	33
3.1. Histología pulmonar	33
3.2. Estimación bayesiana mediante el algoritmo EM	34
3.2.1. Enfoque bayesiano del problema	34
3.2.2. El algoritmo EM	36
3.3. Comparación entre modelos Gamma y Normal	37
3.3.1. El modelo Gaussiano	37
3.3.2. La función de distribución Gamma	37
3.3.3. Métricas de Kolmogorov-Smirnov y divergencia de Kullback-Leibler	38
3.4. El modelo de mezclas Gamma	40
3.5. Ejemplo de mezcla de nueve componentes	45

4. Estabilización de varianza	47
4.1. Introducción	47
4.1.1. Transformación de variables aleatorias	49
4.2. Particularización para la distribución Gamma	49
4.2.1. Caracterización de la nueva distribución	50
5. Esquemas de filtrado de ruido no estacionario	51
5.1. Estandarización de la nueva V.A.	51
5.1.1. Resultados de la estabilización	52
5.2. Filtrado mediante el filtro non-local means	53
5.2.1. Implementación del filtro non-local means	54
5.2.2. Resultados	54
5.3. Filtrado mediante el algoritmo BM3D	55
5.3.1. Agrupamiento por bloques	56
5.3.2. Filtrado colaborativo mediante simplificación	56
5.3.3. Implementación del algoritmo BM3D	56
5.3.4. Resultados	59
5.4. Comparativa entre ambos filtros	59
6. Conclusiones y líneas futuras	63
6.1. Conclusiones	63
6.2. Líneas Futuras	64

Índice de figuras

2.1. Espectro de energía de los rayos X	7
2.2. Ilustración esquemática de un tubo de rayos X	7
2.3. Interacciones de los rayos X con la materia	10
2.4. Coeficientes de atenuación lineales para distintos materiales	12
2.5. Geometría de un escáner de tercera generación	14
2.6. Geometría de un escáner de cuarta generación	15
2.7. Representación de un objeto en el espacio de sinogramas	15
2.8. Propiedad de simetría de las proyecciones paralelas	17
2.9. Filtro de <i>backprojections</i>	18
2.10. Comparativa entre los <i>kernel</i> rectangular y sinc	20
2.11. Reconstrucción continua y discreta de la imagen por <i>backprojections</i> .	21
2.12. Esquema básico del algoritmo de <i>backprojections</i>	22
2.13. Geometría de reconstrucción por abanico de haces equiangulares . . .	23
2.14. Geometría de reconstrucción por abanico de haces equiespaciados . .	24
2.15. Imagen de CT del cráneo de un paciente	26
2.16. Sistema de coordenadas basado en el paciente	28
2.17. Ejemplo de imágenes MPR sagital (izquierda) y coronal (derecha) . .	28
3.1. Anatomía del pulmón	34
3.2. Imagen TAC de pulmón	34
3.3. Función de densidad Normal para distintos valores de μ y σ	37
3.4. Función de densidad Gamma para distintos valores de α y β	38
3.5. Imagen del <i>phantom</i> utilizado en los tests	40
3.6. Métricas de error	40
3.7. Funciones $\log(x)$ y $\psi(x)$	45
3.8. Funciones de densidad de probabilidad estimadas del <i>phantom</i>	46
5.1. Comparativa entre distribuciones Gamma, Gamma generalizada y Normal	52
5.2. Resultados obtenidos tras la estabilización del ruido	53
5.3. Estabilización de la varianza	53
5.4. Resultados obtenidos mediante el filtro non-local means	55
5.5. Resultados obtenidos mediante el filtro BM3D	60
5.6. PSNR obtenidas para los filtros non-local means y BM3D	61

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

La utilización de imágenes de tomografía computerizada para diagnóstico en medicina ha experimentado un incremento importante en los últimos años. Las ventajas proporcionadas por dicha tecnología, tanto para diagnosticar enfermedades como para realizar un seguimiento de las mismas, hacen de la tomografía computerizada un instrumento de gran importancia clínica. El empleo de rayos X convierte a la tomografía computerizada en una de las técnicas más empleadas, aunque no está carente de limitaciones. Quizá la más destacable es la exposición a las dosis de radiación o los problemas de ruido presentes en el proceso de formación de las imágenes.

Uno de los ámbitos en los que más influencia está teniendo la tomografía computerizada es en la formación de imágenes pulmonares para su análisis clínico. La EPOC (Enfermedad Pulmonar Obstructiva Crónica) consiste en una serie de dolencias pulmonares crónicas que limitan el flujo de aire en los pulmones y, según las estimaciones de la OMS (Organización Mundial de la Salud), se convertirá en la tercera causa de muerte a nivel global en 2030 [1]. Concretamente, el enfisema pulmonar consiste en la destrucción del tejido funcional del pulmón o parénquima y como resultado deja inutilizable parte del pulmón. El tejido pulmonar se puede analizar al detalle mediante imágenes de tomografía, siendo fundamental que la imagen obtenida computacionalmente esté libre de ruidos o artefactos no deseados que la estropeen.

El principal inconveniente de la tomografía computerizada aplicada a los pulmones se encuentra en el ruido de varianza no estacionaria generado durante el proceso de adquisición. La anatomía interna de cada persona difiere y dependiendo de los distintos niveles y localizaciones de tejidos se obtendrán imágenes con un ruido cuya varianza depende de la localización en la imagen, es decir, es no estacionario. En consecuencia, no es adecuado desde un punto de vista clínico comparar imágenes de diferentes pacientes sin realizar un procesado digital previo que haga homogénea dicha varianza.

En este trabajo se propone un modelo probabilístico para describir el ruido presente en la imagen. Se demuestra mediante métricas de error que este modelo se

ajusta adecuadamente a la distribución real presente en la imagen. Posteriormente, se propone una transformación para estabilizar la varianza del ruido de la imagen y un esquema de filtrado que permite eliminarlo.

1.2. Objetivos

Una vez mostrada la limitación asociada al ruido no estacionario presente en la imagen de tomografía, se establece el principal objetivo de este trabajo:

Desarrollar técnicas de reducción de ruido en imágenes tomográficas por medio de la caracterización estadística de la señal.

Para lograr este objetivo se distinguen distintos subobjetivos:

1. Proponer un modelo paramétrico que describa el comportamiento del ruido no estacionario en imágenes tomográficas.
2. Desarrollar técnicas que permitan la estabilización del ruido no estacionario por medio de transformaciones de las variables aleatorias descritas con el modelo paramétrico propuesto.
3. Aplicación de métodos de filtrado de ruido estacionario sobre los datos transformados.

1.3. Materiales

En aras de satisfacer los objetivos planteados en este proyecto, se dispone de los siguientes recursos:

1. Un conjunto de imágenes de test (*phantom*), adquiridas en el Hospital Brigham and Women's de Boston (MA, USA) y proporcionados por el Applied Chest Imaging Laboratory de la Universidad de Harvard, para experimentar con los distintos modelos de probabilidad.
2. Se dispone de MATLAB ® (versión R2010) como software de cálculo para la realización del procesado expuesto en el presente trabajo.

1.4. Fases y métodos

Con el objetivo de simplificar la comprensión del problema, el desarrollo del presente proyecto se divide en las siguientes fases:

1. Fundamentos teóricos de la tomografía computerizada y descripción del modelo probabilístico.

Se puede modelar de forma matemática el proceso que sufren los rayos X desde que se generan en la fuente del escáner hasta que alcanzan los detectores tras atravesar el cuerpo del paciente. Durante el proceso, la fuente de rayos X produce un espectro polienergético que se atenúa al atravesar los distintos tejidos. A partir de la amplitud del espectro generado y del modelo de Poisson que rige la recepción de fotones de determinada energía se deduce el modelo de ruido de Poisson compuesto que modela las muestras obtenidas en los detectores del escáner.

La señal obtenida en los detectores sufre un procesado que permite generar la imagen a través del filtro de *backprojection*. Dado que no podemos garantizar la existencia de ruido de Poisson compuesto en la imagen, por la imposibilidad de disponer de la señal obtenida en los receptores individuales, en este trabajo se propone un modelo paramétrico para caracterizar el ruido: el modelo Gamma.

2. Estimación de parámetros del modelo de mezclas y adaptación a estimación puntual.

La tomografía pulmonar permite analizar las densidades de los tejidos a través de los *Hounsfield Units*. Se propone, a partir de las densidades reales de los tejidos in vivo, un modelo para caracterizar los píxeles de la imagen. Así pues, se estiman los parámetros de las distribuciones y se comparan con los datos empíricos a partir de dos métricas de error: divergencia de *Kullback-Leibler* y distancia de *Kolmogorov-Smirnov*.

3. Estabilización de varianza.

Mediante la estimación puntual de los parámetros de las distribuciones escogidas, se estudia la posibilidad de realizar una estabilización de varianza que permita transformar dicha respuesta de ruido en una distribución más manejable.

4. Revisión de los esquemas de filtrado de ruido no estacionario y propuesta.

A partir del estudio realizado en el punto anterior, se comparan distintos esquemas de filtrado de ruido no estacionario de la literatura y se propone una estabilización de varianza mediante la transformación de las variables aleatorias Gamma en una distribución más Gaussiana, donde la dependencia entre la media y la varianza de la señal se hace más débil y resulta más sencillo desligar la contribución de ruido de la de señal. Una vez conseguida una transformación

que facilite el análisis de la varianza de ruido, se alcanzará el principal objetivo de este trabajo: homogeneizar el ruido presente en la imagen y filtrarlo.

1.5. Estructura

Este trabajo se estructura de la siguiente manera: Tras esta Introducción, el Capítulo 2 sienta las bases teóricas de la tomografía axial computerizada por rayos X. Se describen los procesos de generación de rayos X y las interacciones de éstos con la materia, cómo a partir de estas interacciones se puede generar una imagen bidimensional y el ruido presente durante la formación de la imagen. En el Capítulo 3 se describe la anatomía pulmonar y se desarrolla la estimación de modelos de probabilidad para imágenes de tomografía de pulmón, comparando distintas propuestas y obteniendo los mapas de probabilidad.

Una vez obtenidos los mapas de probabilidad, en el Capítulo 4 se propone una estabilización de varianza que permite homogeneizar el ruido presente en la imagen. El Capítulo 5 hace uso de la estabilización anterior para filtrar el ruido. Finalmente, el Capítulo 6 cierra el trabajo con unas conclusiones y líneas futuras.

Capítulo 2

Los rayos X como base de la tomografía axial computerizada

La tomografía axial computerizada es una técnica que permite, mediante rayos X, obtener imágenes de tejidos internos del cuerpo humano. El modelado de ruido requerirá conocer las fuentes que lo originan así como el proceso de generación de la imagen. Resulta, por tanto, necesario establecer la base teórica que describe, por un lado, el proceso de generación de los rayos X en la fuente y, por otro, las interacciones producidas cuando la energía emitida atraviesa los átomos de los tejidos estudiados. A partir de dichas interacciones, se muestra cómo es posible generar una imagen utilizando como base los coeficientes de atenuación lineal de los distintos tejidos que forman el pulmón, teniendo en cuenta el ruido generado durante el proceso de adquisición.

2.1. Fundamentos teóricos

2.1.1. Generación y propiedades de los rayos X

Un rayo X es una onda electromagnética cuya longitud de onda λ varía en el rango entre picómetros y nanómetros [2]. La energía en un fotón de rayos X viene definida por la constante de Planck $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J · s y la frecuencia ν del fotón o, lo que es lo mismo, c/λ , siendo $c = 3 \times 10^8$ m/s la velocidad de la luz:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}. \quad (2.1)$$

Por conveniencia, la energía se suele expresar en unidades de electrón-voltios (eV), siendo 1 eV igual a 1.602×10^{-19} J. Como los fotones de los rayos X se producen mediante el impacto de electrones contra un material a alta velocidad, de modo que la energía cinética del electrón se transforma en radiación electromagnética. La máxima energía posible de cada fotón es igual a la energía cinética del electrón que impacta. Teniendo esto en cuenta, un rayo X en el rango desde 10 nm (124 eV) hasta 0.1 nm (12.4 keV) comúnmente se denomina rayo X suave, dado que no tiene capacidad de

penetración en las capas gruesas de los materiales. Por este motivo, estas longitudes de onda no son muy utilizadas en tomografía. En cambio, la longitud de onda de los rayos X empleados varía entre 0.1 nm (12.4 keV) y 0.01 nm (124 keV).

Para producir los rayos X se bombardea una sustancia metálica con electrones a alta velocidad, y las colisiones producidas dan lugar a diferentes tipos de interacciones. La primera de ellas ocurre cuando un electrón se aproxima al núcleo de un átomo y se frena bruscamente debido a la atracción entre el núcleo positivo y la propia carga negativa del electrón. La deceleración repentina del electrón produce entonces una radiación denominada *bremssstrahlung*¹ cuya energía resultante depende de la energía cinética del electrón incidente de forma que a mayor energía cinética, mayor energía del rayo X emitido. Esta radiación es blanca, es decir, comprende todo el espectro de energía. Aparte de electrones de alta velocidad, otras partículas cargadas como protones o partículas α pueden generar *bremssstrahlung*. La intensidad total de radiación resultante para una partícula cargada de masa m y carga ze , i.e. z veces la carga del electrón, que incide sobre un núcleo de carga Ze es proporcional a

$$I \propto \frac{Z^2 z^4 e^6}{m^2}. \quad (2.2)$$

Esta fórmula implica que un electrón es 3 millones de veces más eficiente en la generación de *bremssstrahlung* que un protón o una partícula α , de ahí que sean los más utilizados. Por otro lado, la eficiencia aumenta con el número atómico Z .

El segundo tipo de interacción ocurre cuando un electrón a alta velocidad choca contra un electrón de las capas internas del átomo, liberando este último. Esto provoca que un electrón de una capa exterior ocupe la vacante del electrón liberado por la colisión, de modo que se produce una radiación. Según el modelo clásico del átomo de Bohr, los electrones ocupan órbitas alrededor del núcleo con niveles de energía cuantizados. La energía característica del rayo X emitido será, por tanto, la diferencia entre las energías de unión de cada nivel orbital (denominados con las siglas K, L, M o N). Además, cada elemento de la tabla periódica tiene sus propias capas de energía, por lo que la energía de los rayos X es específica para cada átomo.

El tercer tipo de interacción se produce cuando un electrón choca directamente contra el núcleo del átomo, liberándose toda la energía como radiación *bremssstrahlung*. La energía liberada en esta interacción supone el límite superior de energía en el espectro de rayos X. No obstante, la probabilidad de que se produzcan estas colisiones es muy pequeña.

La figura 2.1 muestra el espectro de radiación X del tungsteno empleando un tubo de rayos X a 80, 100, 120 y 140 kVp, cuyo esquema se muestra en la figura 2.2. Como se observa, el espectro varía aproximadamente entre 20 y 140 keV. En la parte

¹Este término tiene su origen en el alemán como la fusión de las palabras *bremesen*, que significa frenar, y *strahlung*, que significa radiación. Así, por tanto, el significado sería el de “radiación decelerada”.

2.1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

izquierda de la figura, entre 30 y 50 keV, se representa la radiación *bremstrahlung* resultante del primer tipo de interacción, generada cuando un electrón atraviesa parcialmente el núcleo. A continuación, se observan los picos debidos a las diferencias entre las energías de unión de las distintas capas (K, L, M y N) de los átomos, cuya influencia en la radiación X se explicó anteriormente. Por último, en la parte derecha de la figura, se puede apreciar la radiación *bremstrahlung* producida cuando un electrón choca directamente contra el núcleo de un átomo. En este caso, los valores de radiación son mucho menores, ya que estas interacciones son las menos probables.

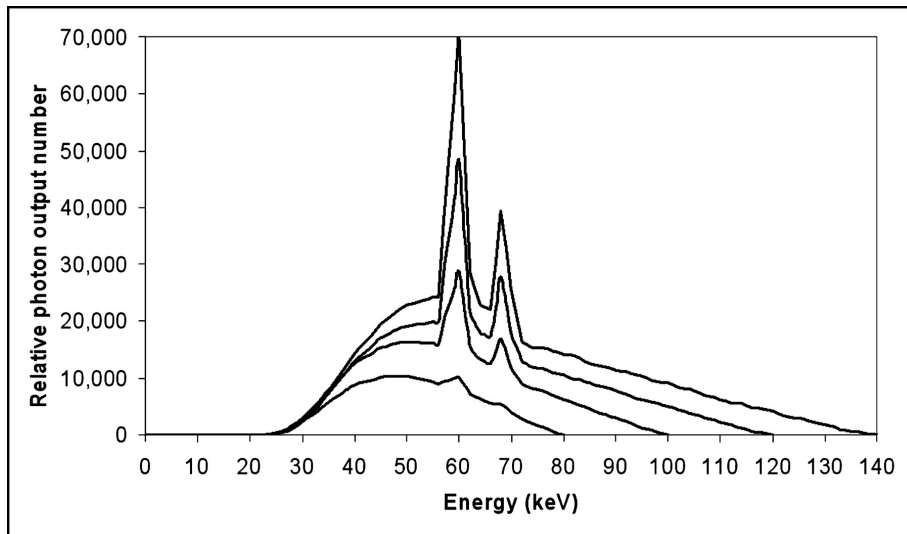


Figura 2.1: Espectro de energía de los rayos X. Imagen obtenida de [3].

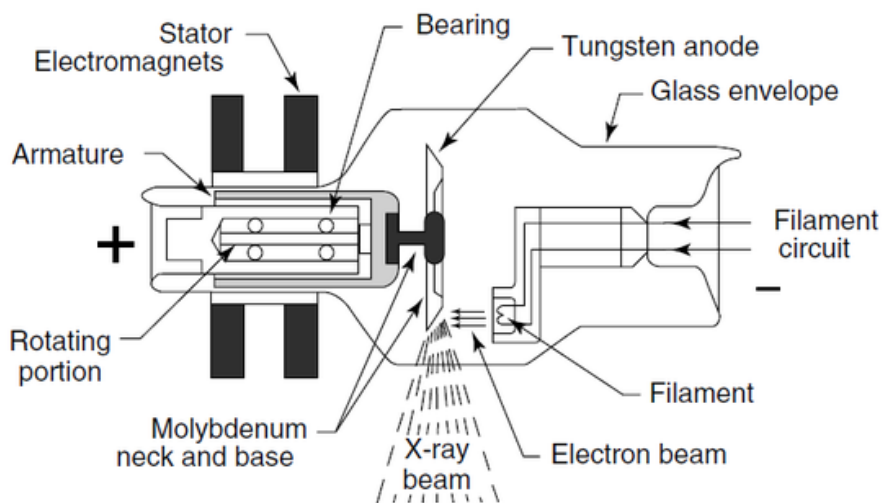


Figura 2.2: Ilustración esquemática de un tubo de rayos X. Imagen obtenida de [4].

2.1.2. Interacción de los rayos X con la materia

La formación de imágenes se basa en la atenuación que sufren los rayos X cuando atraviesan los diferentes tejidos del cuerpo humano. Los rayos X transmitidos, al atravesar la materia, pueden sufrir atenuación debida a la absorción fotoeléctrica, el scattering o dispersión Rayleigh, el efecto Compton y la producción de pares. También es posible que los rayos atraviesen libremente la materia sin atenuarse, denominándose en este caso radiación primaria. Cuando los rayos son detectados en recepción, producen una imagen bidimensional de las interacciones producidas, mostrando así la anatomía del paciente [5]. A continuación se describe individualmente cada una de las posibles interacciones.

Absorción fotoeléctrica

La absorción fotoeléctrica se produce cuando la energía del fotón incidente es igual o mayor que la energía de unión de las capas internas de los electrones del átomo [5]. Dado que el fotón incidente transfiere toda su energía al electrón del átomo, este último sale despedido con una energía cinética igual a la diferencia entre la energía incidente del rayo X y la energía que lo mantiene en su capa (normalmente la capa K), de forma que el átomo se ioniza y pasa a tener carga positiva. A continuación, la vacante producida por el electrón es ocupada por un electrón de una capa más exterior, de menor energía (por ejemplo, la capa L o M), generándose así una radiación característica cuya energía es igual a la diferencia entre las energías de unión de las capas de los electrones original y final. Asimismo, el fotoelectrón expulsado en la primera interacción puede causar más ionizaciones que depositen más energía localmente y generen radiación, al provocar la aparición de múltiples vacantes que tienen que ser ocupadas por electrones de capas exteriores. Los tejidos del cuerpo humano generalmente están formados por átomos de bajo número atómico Z , los cuales tienen bajas energías de unión en su capa K, por lo que la absorción fotoeléctrica, denotada por τ , suele traer consigo la absorción total de la energía incidente. Concretamente, la probabilidad de que se produzca absorción fotoeléctrica es proporcional a

$$P \propto \frac{Z^3}{E^3}, \quad (2.3)$$

siendo Z el número atómico del átomo que interacciona y E la energía del fotón incidente. Por tanto, es más probable que se produzca absorción fotoeléctrica en presencia de números atómicos altos y energías de rayos X bajas, condiciones que favorecen la aparición de fuerte contraste entre los tejidos estudiados debido a que la energía se atenúa.

Scattering Rayleigh

El scattering Rayleigh, o también llamado scattering coherente o scattering elástico se produce cuando la energía del fotón de rayos X incidente no se convierte en energía cinética y, por tanto, no se produce ionización del átomo [2]. En este caso, el fotón incidente aumenta la energía del electrón del átomo pero este último, en lugar

2.1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

de ser expulsado, vuelve a su estado inicial al emitir un fotón de rayos X de una energía igual a la del incidente pero en una dirección ligeramente diferente, normalmente, hacia adelante [5]. Al igual que el efecto fotoeléctrico, el scattering Rayleigh, representado por una probabilidad σ_R , es más probable para números atómicos altos y bajas energías. Por ello, ha demostrado ser de más utilidad en la caracterización del tejido óseo, con número atómico Z cercano a 20 debido al calcio, que en la caracterización de otros tejidos como grasa (en promedio, $Z = 6.3$) u otros tejidos finos (aproximadamente, $Z = 7.4$) [6].

Efecto Compton

El efecto Compton tiene lugar cuando un fotón incidente posee una energía E_0 mucho mayor que la energía de unión del electrón del átomo con el que interacciona, que se puede considerar “libre” [2]. El impacto del fotón hace que parte de la energía libere el electrón del átomo con un ángulo ϕ , mientras que el propio fotón es dispersado con la energía restante E_S en un ángulo θ [5]. Por ello, este tipo de interacción produce un ión positivo, un electrón desviado y un fotón dispersado. El electrón que es liberado lo hace con un ángulo entre 0° y 90° mientras que el fotón dispersado puede hacerlo en un ángulo θ entre 0° y 180° , siendo más probables los ángulos mayores de 90° a medida que aumenta la energía del rayo X. La relación entre las energías del fotón dispersado y el fotón incidente viene dada por la ecuación de *Klein-Nishina*:

$$\frac{E_S}{E_0} = \frac{1}{1 + \frac{E_0}{511 \text{ keV}}(1 - \cos \theta)}. \quad (2.4)$$

En esta igualdad, los 511 keV hacen referencia a la masa en reposo del electrón. Se deduce de este cociente que la energía del rayo X dispersado disminuye a medida que el ángulo de dispersión aumenta, amplificándose este efecto al incrementar la energía incidente E_0 .

Tras esta interacción, el fotón dispersado puede provocar nuevas colisiones antes de salir del cuerpo, pero no toda la energía es absorbida por el paciente, como pasa normalmente con el efecto fotoeléctrico. El efecto Compton se produce con electrones libres, por lo que su probabilidad (σ) depende principalmente de la densidad de electrones del material y en menor medida del número atómico Z . El número de electrones por unidad de masa para la mayoría de elementos es aproximadamente constante debido a que en el núcleo existe el mismo número de protones y neutrones. Para números atómicos muy altos, el número de electrones disminuye progresivamente, ya que la estabilidad de estos elementos requiere un número mayor de neutrones, y por tanto mayor masa para una cantidad fija de electrones. Por un lado, dado que la mayoría de tejidos tienen una densidad electrónica similar independientemente de su número atómico Z , es preferible evitar que se produzca el efecto Compton para no deteriorar la calidad de la imagen de tomografía, puesto que no proporciona información sobre el contraste entre tejidos. Por otro lado, al producirse con electrones libres, tiene menos influencia para átomos de alto número atómico Z , puesto que,

como hemos indicado, éstos requieren mayor estabilidad y con ello mayor número de neutrones (masa) para un número fijo de electrones. Además, la probabilidad de que se produzca el efecto Compton es prácticamente independiente de la energía incidente pero, a medida que aumenta, el electrón libre que sufre el retroceso absorbe la mayor parte de la energía.

Producción de pares

La producción de pares tiene lugar cuando el rayo X incidente tiene una energía superior a 1.02 MeV, que representa la energía en reposo equivalente a dos electrones ($E = 2m_0c^2$, con $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$ Kg la masa del electrón en reposo y $c = 3 \cdot 10^8$ m/s la velocidad de la luz) [5]. La interacción del fotón incidente con el campo eléctrico del núcleo da lugar a la formación de un par electrón-positrón, transfiriéndose el exceso de energía de 1.02 MeV a la energía cinética del par. Como resultado, cuando el positrón pierde su energía, se recombina con cualquier electrón produciendo radiación. La probabilidad π de este suceso, sin embargo, es pequeña al utilizarse rayos X, ya que las energías empleadas suelen estar por debajo de 1.02 MeV (normalmente varían entre 20 keV y 140 keV [2]).

En la figura 2.3 se presenta un esquema con todos los tipos de interacciones que se han expuesto.

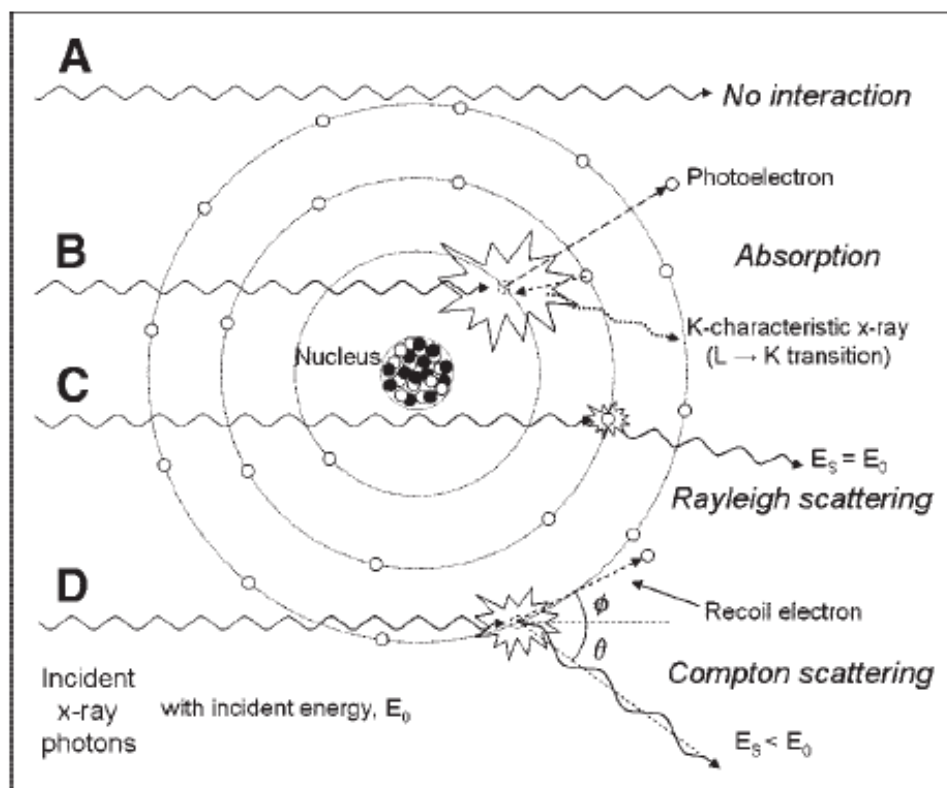


Figura 2.3: Interacciones de los rayos X con la materia. Imagen obtenida de [5].

2.2. Formación de la imagen de tomografía

2.2.1. Coeficientes de atenuación lineal

El efecto global producido por las interacciones descritas en el apartado 2.1.2 es la atenuación de los fotones, es decir, de la energía que atraviesa el cuerpo [2]. Dicha atenuación se expresa como una relación exponencial entre el flujo de fotones incidentes y transmitidos para un rayo X monocromático (monoenergético) que atraviesa un cuerpo de densidad uniforme:

$$I = I_0 e^{-(\tau + \sigma + \sigma_R)L}, \quad (2.5)$$

donde I e I_0 son las intensidades de los rayos transmitido e incidente, L es el grosor del tejido, y τ , σ y σ_R son los coeficientes de atenuación de las interacciones fotoeléctrica, Compton, y scattering Rayleigh o coherente, respectivamente. Nótese que se ha despreciado el efecto de producción de pares dado que prácticamente no afecta para las energías empleadas en tomografía computerizada, por lo que no aparece la probabilidad π . Alternativamente, se puede expresar la ecuación anterior como:

$$I = I_0 e^{-\mu L}, \quad (2.6)$$

conocida como ley de *Beer-Lambert*, donde μ es el coeficiente de atenuación lineal del material, esto es, la suma de los coeficientes individuales de atenuación debidos a las diferentes interacciones. Los valores de μ dependen de la energía del rayo X incidente y de la composición del material, lo que facilita la identificación de los distintos tejidos.

En la figura 2.4, se muestra μ en función de la energía de los fotones incidentes para el yodo, huesos, tejido fino y agua. Se observa que tanto el agua como los tejidos tienen prácticamente el mismo coeficiente de atenuación, pues una gran cantidad de tejido está compuesto por agua. En cuanto al yodo, tiene un coeficiente de atenuación mucho más alto que el tejido o el agua, razón por la que se suele inyectar por vía intravenosa a los pacientes como agente de contraste para aumentar la opacidad de la sangre frente a los rayos X. Asimismo, se observa claramente un cambio brusco en el coeficiente de atenuación del yodo a partir de 33.2 keV, debido a que en este punto se supera la energía de unión de la capa K del yodo. Este efecto tiene gran importancia debido a que las energías de unión varían en función del material, lo que hace que sus coeficientes sean diferentes. Por otra parte, el coeficiente de atenuación del hueso es mayor y las formas de las curvas de atenuación son bastante distintas respecto a las de los tejidos. Esto se traduce en la aparición de artefactos indeseados en la imagen de CT debido al amplio espectro de los rayos producidos por los tubos de rayos X. Al igual que se vio con el yodo, en el caso del hueso se aprecia en 4 keV el corte de la energía de unión de la capa K del calcio.

El empleo de tubos de rayos X a 120 kVp se traduce en una energía media de los fotones de 70 keV. Para este valor de energía, los coeficientes μ resultantes del agua y los músculos son muy similares, respectivamente, 0.1928 cm^{-1} y 0.1916 cm^{-1} . Con

2.2. FORMACIÓN DE LA IMAGEN DE TOMOGRAFÍA

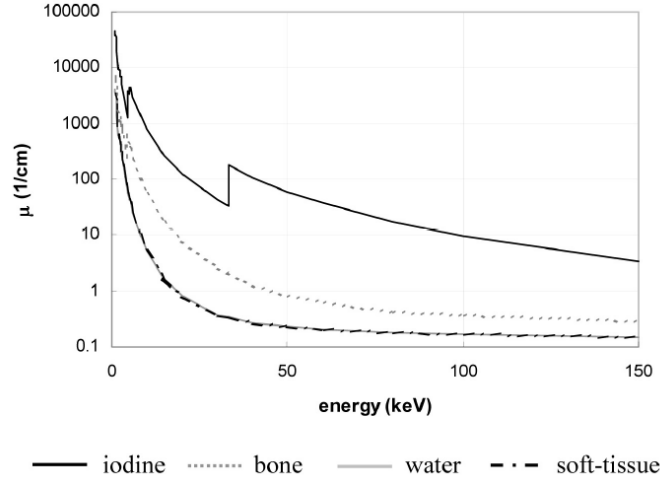


Figura 2.4: Coeficientes de atenuación lineales para distintos materiales. Imagen obtenida de [2].

el objetivo de aumentar el contraste y facilitar la distinción entre los tipos de tejidos, se define la siguiente escala de intensidad en reconstrucción de imagen:

$$\text{Número CT} = \frac{\mu - \mu_{\text{agua}}}{\mu_{\text{agua}}} \cdot 1000, \quad (2.7)$$

donde μ_{agua} es el coeficiente de atenuación lineal del agua. Este número se mide en HUs (*Hounsfield Units* o *Hounsfields*)². Por definición, el número CT del agua es cero. Para el aire, el número CT es -1000 HU, ya que $\mu_{\text{aire}} = 0$. Los tejidos finos, como la grasa y los músculos, entre otros, tienen números CT que varían entre -100 y 60 HU, y el número CT de los huesos varía desde 250 hasta más de 1000 HU [2]. Las imágenes de CT son, por tanto, mapas de los coeficientes de atenuación de los distintos tejidos escaneados [5].

2.2.2. Estimación de la atenuación en condiciones no ideales

La tomografía computerizada se basa en la medición de la energía de rayos X recibida para distintos ángulos. En la ecuación 2.6 se mostraba la relación entre la intensidad recibida y la intensidad transmitida de un rayo X monoenergético en función del coeficiente de atenuación μ del material [2]. En el caso práctico, sin embargo, los tejidos están compuestos por estructuras con distintos grados de atenuación, que pueden considerarse uniformes individualmente. Esto hace que el problema se reduzca a dividir la intensidad total recibida como función de la atenuación contribuida individualmente por cada estructura:

$$I = I_0 e^{-\sum_{n=1}^N \mu_n \Delta x}, \quad (2.8)$$

²El nombre de estas unidades se debe a Godfrey Newbold Hounsfield, ingeniero inglés que desarrolló el primer prototipo de tomografía aplicado a la medicina. Hounsfield recibió en 1979 el premio Nobel de medicina junto con Allan McLeod Cormack por la invención y desarrollo de la Tomografía axial computerizada.

2.2. FORMACIÓN DE LA IMAGEN DE TOMOGRAFÍA

donde Δx es el grosor de dichas divisiones. Dividiendo ambos lados de la ecuación por I_0 y tomando el logaritmo, se obtiene:

$$p = -\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = \sum_{n=1}^N \mu_n \Delta x. \quad (2.9)$$

Cuando Δx tiende a cero, la suma anterior se convierte en una integral y se obtiene la ecuación que define lo que es una proyección en tomografía computerizada:

$$p = -\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = \int_L \mu(x) dx. \quad (2.10)$$

En otras palabras, el logaritmo negativo del cociente entre la intensidad recibida y la intensidad transmitida del rayo X representa la integral de línea de todos los coeficientes de atenuación a lo largo del camino seguido por dicho rayo. Esta relación, no obstante, sólo es válida en condiciones ideales, las cuales no se cumplen en un escáner real. Por ello, los datos obtenidos deben ser procesados antes de aplicar la fórmula de reconstrucción de imagen por filtrado de *backprojection*, que se describirá más adelante.

A continuación, se enumeran los aspectos que impiden que la ecuación 2.10 sea estrictamente válida. En primer lugar, el espectro de energía de los rayos X no es en la práctica monoenergético, sino que los fotones transmitidos tendrán energías que varían dentro de un margen. Además, los valores de μ cambian significativamente en función de la energía del fotón transmitido, lo que, siendo rigurosos, invalida la ecuación anterior. Por otra parte, no existe una relación lineal entre la proyección medida y el grosor del material, problema conocido como *beam-hardening*. El efecto resultante consiste en el desplazamiento del espectro de rayos X transmitidos hacia energías mayores al aumentar el grosor del material [5]. Dado que los fotones de baja frecuencia se absorben más fácilmente que los de alta frecuencia, el rayo X experimentará un incremento de su energía media a medida que atraviese los tejidos, puesto que sobrevivirán los fotones de energías más altas, dando lugar a la aparición de artefactos no deseados (discrepancias entre los números CT obtenidos y los coeficientes de atenuación reales) en la imagen final [2]. En segundo lugar, parte de la señal detectada tiene su origen en fotones dispersados y no en los fotones primarios. Esto añade una señal de baja frecuencia que, al aplicar el logaritmo negativo para convertir el flujo de fotones recibidos en una integral de línea, transforma dicha integral en una operación no lineal, creando artefactos en la imagen reconstruida. En tercer lugar, los sistemas de adquisición no son perfectamente lineales, existen corrientes umbrales y la ganancia de los detectores puede ser dependiente de su historial de exposición. Una cuarta fuente de imprecisión se debe a los movimientos involuntarios de los pacientes, que hacen que las proyecciones tomadas en distintos instantes de tiempo no representen las integrales de atenuación del mismo objeto. Otras fuentes de error pueden ser la radiación no focal del tubo de rayos X, la presencia de objetos metálicos, el efecto del volumen parcial o las vibraciones mecánicas del escáner.

Por consiguiente, la reconstrucción de imagen en tomografía computerizada no es simplemente un problema ideal de formación de imágenes, sino que necesita un procesamiento de imagen adicional que permita solventar los problemas descritos en este apartado. Muchos de estos esquemas de procesamiento son propietarios de las empresas de comercialización de escáneres y, por tanto, no son accesibles para el público en general. En el siguiente apartado se muestra la principal herramienta de diagnóstico de los mencionados errores en la obtención de las proyecciones.

2.2.3. Geometría de muestreo

Los escáneres de tercera y cuarta generación, que son los más utilizados en la actualidad, tienen en común una geometría de muestreo según la cual varios detectores se sitúan en un arco concéntrico a la fuente de rayos X, tal como se observa en las figuras 2.5 y 2.6. La forma más habitual de presentar los datos obtenidos de las distintas proyecciones es el llamado sinograma [2]. En este modelo, el eje horizontal representa los detectores y el eje vertical representa el ángulo de proyección. Por tanto, cada proyección se representa en el sinograma por medio de un conjunto de muestras situadas a lo largo de una línea horizontal. Si se representan las muestras obtenidas a lo largo de todos los ángulos de proyección, se obtiene una imagen bidimensional cuyas intensidades se corresponden con la magnitud de las distintas proyecciones.

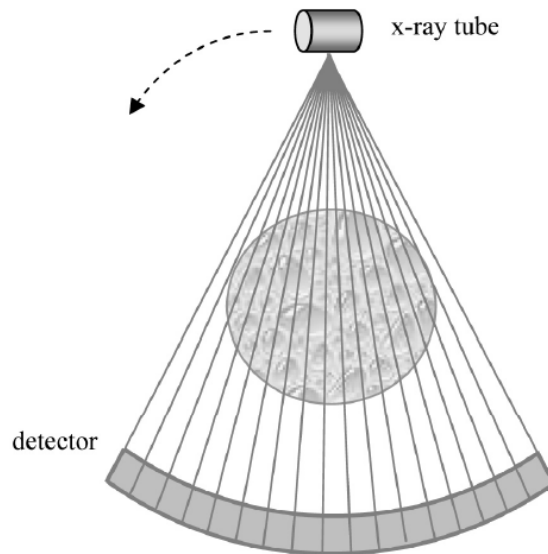


Figura 2.5: Geometría de un escáner de tercera generación. Imagen obtenida de [2].

Para entender mejor la geometría, se considera la proyección generada por el punto de un objeto, representado en coordenadas polares (r, ϕ) , en el sinograma. Para calcular los puntos generados por dicho punto en el plano detector, se define un sistema de coordenadas rotado (x', y') , cuyo eje y' es paralelo al haz de rayos X, que se muestra en la figura 2.7. Por su parte, x' es la localización del punto en

2.2. FORMACIÓN DE LA IMAGEN DE TOMOGRAFÍA

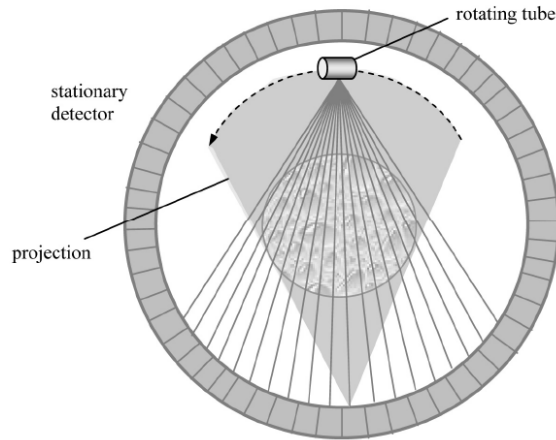


Figura 2.6: Geometría de un escáner de cuarta generación. Imagen obtenida de [2].

la proyección, que cumple la relación $x' = r \cdot \cos(\phi - \beta)$, siendo β el ángulo de proyección formado con el eje x .

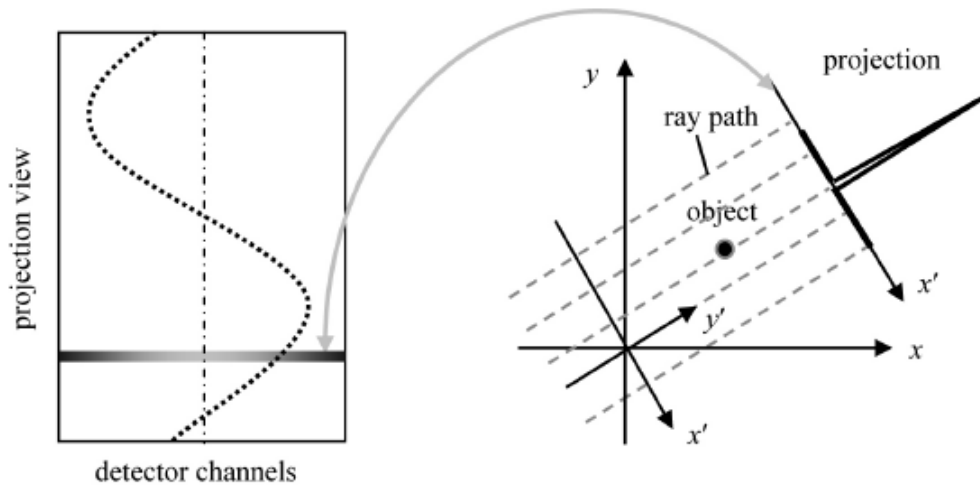


Figura 2.7: Representación de un objeto en el espacio de sinogramas (geometría de rayos paralelos). Imagen obtenida de [2].

Si se representa la proyección del punto del objeto como función del ángulo de proyección, se obtiene una curva sinusoidal y, dado que cada objeto está formado por múltiples puntos situados en el espacio, su proyección será una serie de senos y cosenos superpuestos en el espacio de sinogramas. Esto hace del sinograma una potente herramienta de análisis de datos, capaz de detectar anomalías en un escáner de tomografía. Por ejemplo, un detector defectuoso aparecerá como una línea vertical en el sinograma, mientras que un mal funcionamiento del tubo de rayos X se traducirá en líneas horizontales.

2.2.4. Filtro de *backprojection*

Reconstrucción por haces paralelos

Como se explicó en el apartado 2.2.1, el objeto que se trata de reconstruir es una distribución bidimensional de los coeficientes de atenuación lineal del objeto [2]. Se sabe de teoría de la señal que la transformada de Fourier de la proyección de un objeto en cualquier ángulo es igual a una línea tomada en la misma dirección de la transformada de Fourier bidimensional del mismo objeto. La imagen $f(x, y)$ se puede recuperar entonces a partir de su transformada $F(u, v)$ mediante la transformada inversa de Fourier

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} dudv. \quad (2.11)$$

Para representar $F(u, v)$ de un modo más acorde a como se obtienen los datos de las proyecciones, se realiza una transformación de coordenadas cartesianas a polares:

$$\begin{cases} u = \omega \cos \theta \\ v = \omega \sin \theta \end{cases}. \quad (2.12)$$

Por otro lado,

$$dudv = \begin{vmatrix} \partial u / \partial \omega & \partial u / \partial \theta \\ \partial v / \partial \omega & \partial v / \partial \theta \end{vmatrix} d\omega d\theta = \omega d\omega d\theta. \quad (2.13)$$

Sustituyendo 2.11 y 2.12 en 2.13:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{j2\pi(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega. \quad (2.14)$$

Utilizando el teorema de las *secciones* de Fourier (*Fourier Slice Theorem* [2]), se sustituye $F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$ por la transformada de Fourier de la proyección, $P(\omega, \theta)$, y se obtiene

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} P(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega \\ &= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} P(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega + \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} P(\omega, \theta + \pi) e^{-j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En la geometría de muestreo paralela, se cumple la propiedad de simetría $p(t, \theta + \pi) = p(-t, \theta)$, como se aprecia en la figura 2.8. Esta propiedad se puede aplicar al par transformado de Fourier, $P(\omega, \theta + \pi) = P(-\omega, \theta)$, llegando a la siguiente igualdad:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega. \quad (2.16)$$

2.2. FORMACIÓN DE LA IMAGEN DE TOMOGRAFÍA

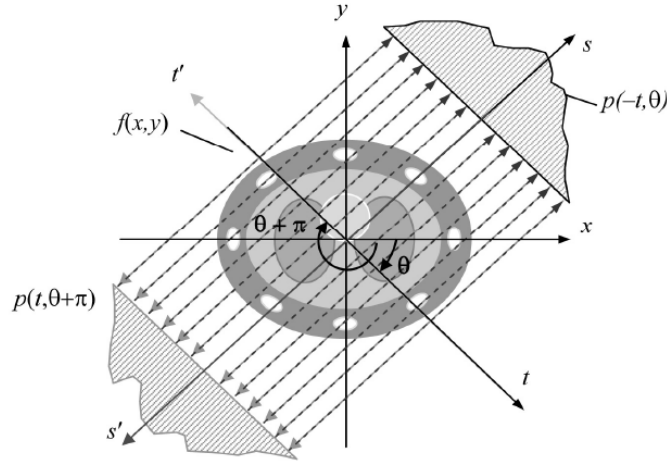


Figura 2.8: Propiedad de simetría de las proyecciones paralelas. Imagen obtenida de [2].

Expresando dicha ecuación en el sistema de coordenadas rotado (s, t) , se obtiene:

$$f(x, y) = \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega. \quad (2.17)$$

En la ecuación 2.17, $P(\omega, \theta)$ es la transformada de Fourier de la proyección tomada en el ángulo θ . Esta integral es la transformada inversa de Fourier de $P(\omega, \theta) |\omega|$, que en el dominio espacial representa una proyección filtrada por una función cuya respuesta en frecuencia es $|\omega|$, de ahí que se la conozca como *proyección filtrada*. Si denotamos para el ángulo θ la proyección filtrada (ver figura 2.9), es decir, la integral de la ecuación anterior, mediante $g(t, \theta)$, llegamos a

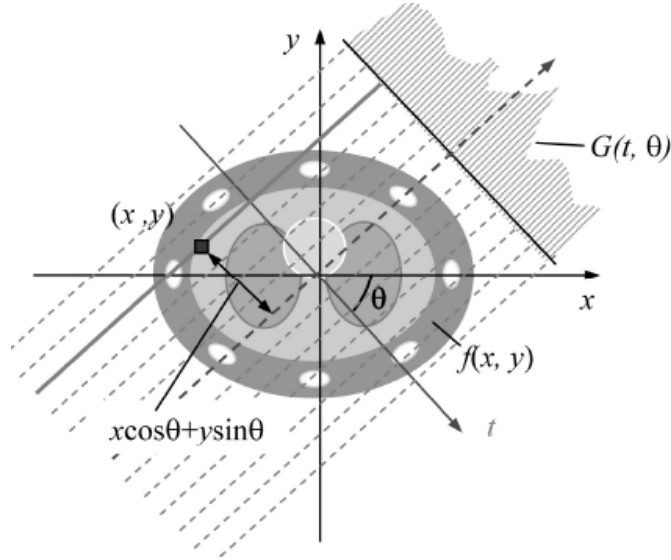
$$g(t, \theta) = g(x \cos \theta + y \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega. \quad (2.18)$$

Y la ecuación 2.17 puede reescribirse como

$$f(x, y) = \int_0^\pi g(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta. \quad (2.19)$$

La ecuación 2.19 establece que la imagen reconstruida $f(x, y)$ en el punto (x, y) es la suma de todas las proyecciones filtradas que atraviesan dicho punto.

La reconstrucción de imagen consiste, por tanto, en la aplicación de la ecuación 2.18. El producto de dos funciones en el dominio frecuencial se corresponde con la convolución de dichas funciones en el dominio espacial. La función $P(\omega, \theta)$ en


 Figura 2.9: Filtro de *backprojections*. Imagen obtenida de [2].

el dominio espacial es la proyección medida $p(t, \theta)$, mientras que la función correspondiente en el dominio espacial (la respuesta al impulso) del filtro $|\omega|$ se obtiene mediante la transformada de Fourier inversa

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega. \quad (2.20)$$

Sin embargo, esta ecuación no se puede implementar en la práctica porque puede tomar valores infinitos. Como solución, se añade una función que reduce el ancho de banda de forma que fuera del intervalo $(-\Gamma, \Gamma)$ el filtro anterior tiene un valor nulo:

$$g(t, \theta) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} P(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega. \quad (2.21)$$

Desafortunadamente, tampoco es posible implementar esta función. En primer lugar, el *kernel* de dicha función debe cumplir el criterio de Nyquist

$$\Gamma = \frac{1}{2\delta} \text{ ciclos/mm}, \quad (2.22)$$

donde δ es el intervalo de muestreo de las proyecciones en mm. Esta condición hace que la función rampa $|\omega|$ esté multiplicada por una función ventana de forma que

$$H(\omega) = |\omega|q(\omega), \quad (2.23)$$

con

$$q(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \Gamma \\ 0, & \text{resto} \end{cases}. \quad (2.24)$$

2.2. FORMACIÓN DE LA IMAGEN DE TOMOGRAFÍA

Se puede demostrar que la proyección filtrada de la ecuación 2.18 viene dada ahora por la convolución en el espacio ([2])

$$g(n\delta, \theta) = \delta \sum_{k=0}^{N-1} h(n\delta - k\delta)p(k\delta, \theta), n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.25)$$

La transformada de Fourier de la $h(m\delta)$ finita es distinta de aquella de la ecuación 2.23, siendo la principal diferencia la componente DC que aparece. Pese a ser ésta una pequeña diferencia, puede tener un gran impacto en la precisión de los números CT obtenidos.

En segundo lugar, el obligado empleo de una convolución circular hace necesario rellenar con ceros el conjunto de muestras obtenidas en las proyecciones para evitar la aparición de artefactos no deseados en la imagen y la falta de precisión en HU.

Jiang Hsieh (2009) en [2] incide en la importancia de los *kernel* de reconstrucción. El filtro de rampa $|\omega|$ prefiere las altas frecuencias, comportándose por tanto como un derivador. La ventana rectangular aplicada en la ecuación 2.23 consigue limitar la respuesta en frecuencia del filtro, y puede emplearse para eliminar el ruido. Existen diferentes ventanas que permiten modificar el filtro de rampa en función de las partes de la imagen que se quiere destacar. Por ejemplo, la ventana de Hanning viene definida por

$$\Pi_H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_L \\ 0,5 + 0,5 \cos\left(\frac{\pi(|\omega| - \omega_L)}{\omega_H - \omega_L}\right), & \omega_L < |\omega| \leq \omega_H, \\ 0, & |\omega| > \omega_H \end{cases} \quad (2.26)$$

mientras que la ventana *sinc* se define mediante

$$\Pi_S(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_L \\ \frac{\sin(\pi(|\omega| - \omega_L)/(\omega_H - \omega_L))}{\pi(|\omega| - \omega_L)(\omega_H - \omega_L)}, & \omega_L < |\omega| \leq \omega_H. \\ 0, & |\omega| > \omega_H \end{cases} \quad (2.27)$$

En ambos casos, ω_H y ω_L son los nuevos límites frecuenciales superior e inferior que queremos aplicar. La figura 2.10 muestra una comparativa en el funcionamiento de las ventanas rectangular y sinc utilizando un *phantom* como imagen de prueba.

Comparando ambas imágenes, se observa que el comportamiento de la función sinc permite eliminar más ruido que la función rectangular. Esto es debido a que la sinc, por su definición, tiene más capacidad para eliminar las componentes de frecuencias altas, precisamente aquellas que contienen la mayoría del ruido producido por los fotones. No obstante, la reducción de ruido conseguida al acortar la respuesta

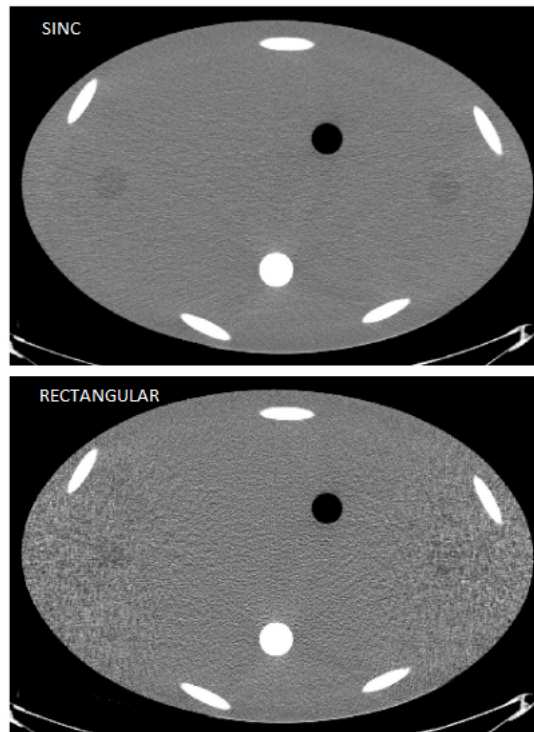


Figura 2.10: Comparativa entre los *kernel* rectangular y sinc. Imagen adaptada de [2].

del filtro condiciona también la resolución espacial, por lo que existe un compromiso entre ambos factores. Y no sólo influye la forma de la ventana utilizada, sino también las frecuencias de corte configurables para un mismo tipo de ventana, lo que proporciona una gran flexibilidad de diseño. La elección del *kernel* de reconstrucción en escáneres comerciales dependerá de la aplicación clínica. Estos *kernel* son soluciones propietarias de los fabricantes (no accesibles públicamente), como LightSpeed® o Discovery™, y sus características particulares permiten mejorar la definición de huesos, tejidos finos, pulmones o placas calcificadas, entre otros.

Volviendo al desarrollo de la teoría del filtro de *backprojections*, como se había visto, este proceso convierte las muestras de una proyección filtrada en una línea recta en la imagen reconstruida (ver figura 2.11). Esta imagen reconstruida es continua pero, al implementar las proyecciones y la imagen en un ordenador, sufrirá un proceso de discretización. Por esta razón, es necesario aplicar un esquema de interpolación bien entre las muestras de las proyecciones, bien en la imagen final reconstruida.

Los algoritmos de interpolación más utilizados son *pixel-driven*, *ray-driven*, Lagrange o interpolación cúbica segmentaria. El rendimiento de los distintos algoritmos de interpolación se mide mediante la función de transferencia de modulación (MTF). Un sistema ideal tendrá una MTF plana, indicando que la respuesta del sistema es independiente de la frecuencia de entrada.

Resumiendo, el proceso de reconstrucción para geometría de rayos paralelos es

2.2. FORMACIÓN DE LA IMAGEN DE TOMOGRAFÍA

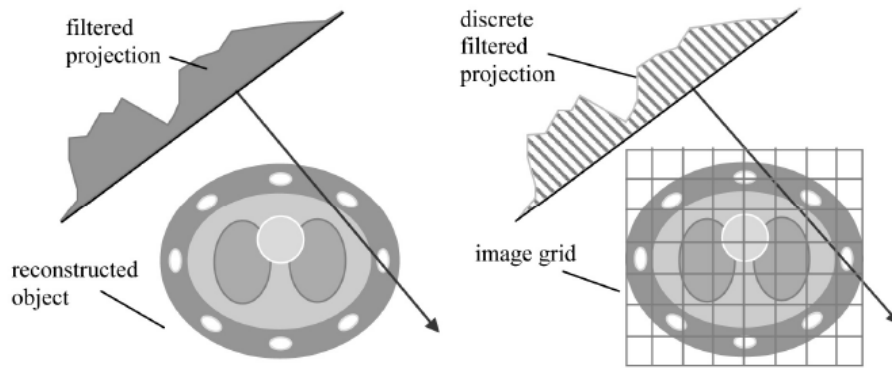


Figura 2.11: Reconstrucción continua y discreta de la imagen por *backprojections*. Imagen obtenida de [2]

como sigue:

1. Se toman N muestras de una proyección y se rellena el vector resultante con ceros para evitar interferencias que produzcan artefactos en la imagen.
2. Se hace la transformada de Fourier de las proyecciones y se le aplica el filtro correspondiente.
3. Se hace la transformada de Fourier inversa para obtener la proyección filtrada.
4. Se implementa el algoritmo de *backprojections* con interpolación de las muestras para obtener los valores de los píxeles.
5. Se repite todo el proceso hasta medir las proyecciones en todos los ángulos considerados.

La figura 2.12 muestra el proceso de forma esquemática.

Reconstrucción por abanico de haces

Los escáneres de tercera generación, que son los más utilizados comercialmente, se caracterizan por tener una fuente de rayos X centrada en un punto de forma que cada proyección se obtiene al muestrear múltiples canales detectores en una ventana corta de tiempo. Su geometría se muestra en la figura 2.13 y puede ser de dos tipos: abanico de haces equiangulares o abanico de haces equiespaciados. En el primer caso, los detectores se colocan en un arco concéntrico de forma que el ángulo de todos ellos respecto a la fuente es constante. En el segundo tipo de geometría, los detectores se colocan a lo largo de una recta de forma que el ángulo respecto a la fuente es variable.

En el caso del muestreo equiangular, cualquier rayo se puede caracterizar por dos parámetros γ (ángulo entre el rayo y el iso-rayo, entendido éste como aquel que

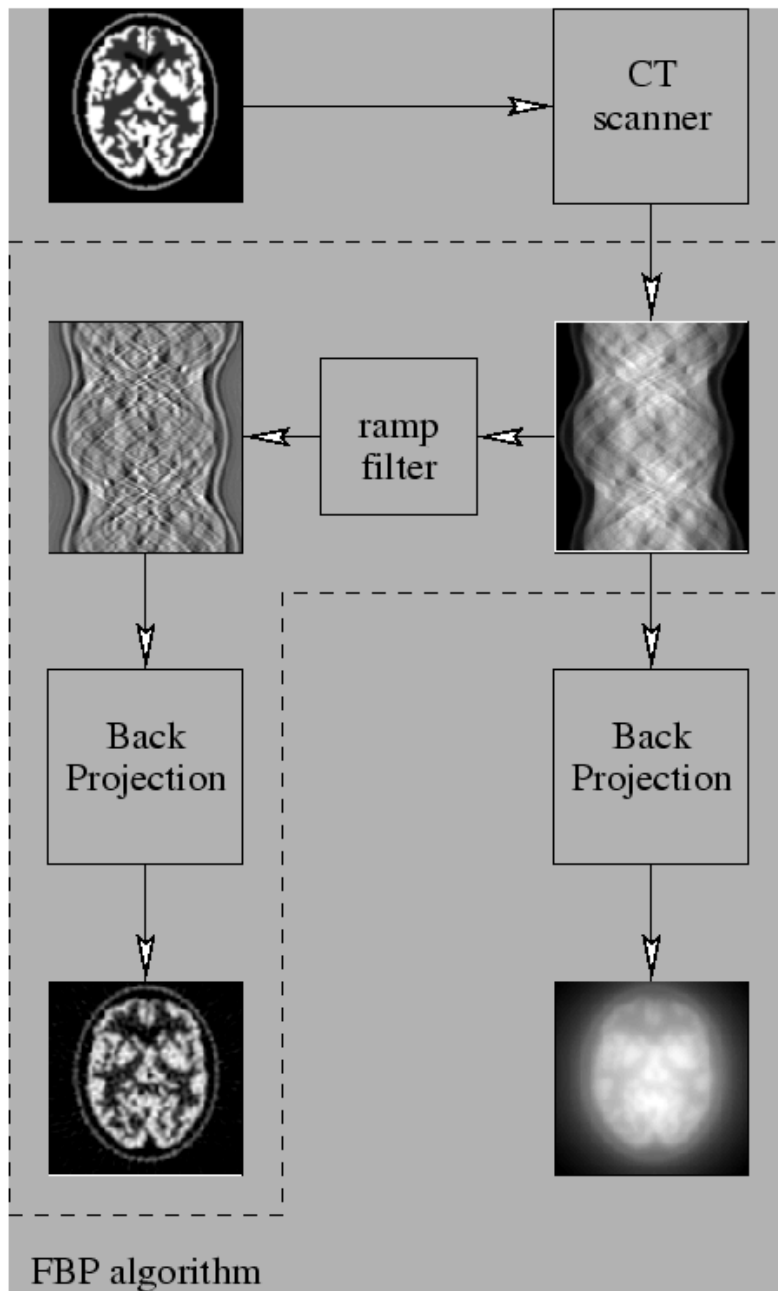


Figura 2.12: Esquema básico del algoritmo de *backprojections*. Imagen obtenida de [7].

conecta la fuente con el iso-centro) y β (ángulo entre el iso-rayo y el eje y). Haciendo el cambio

$$\begin{cases} \theta = \beta + \gamma \\ t = D \sin \gamma \end{cases}, \quad (2.28)$$

para operar igual que en el caso de la geometría de rayos paralelos, se puede demos-

2.2. FORMACIÓN DE LA IMAGEN DE TOMOGRAFÍA

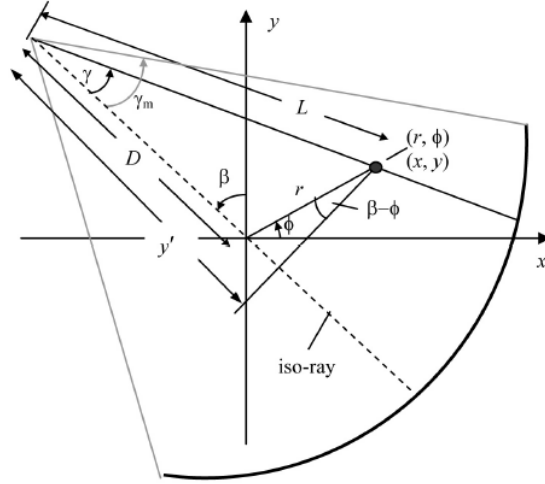


Figura 2.13: Geometría de reconstrucción por abanico de haces equiangulares. Imagen obtenida de [2].

trar que la imagen es recuperable a partir de

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-t_m}^{t_m} p(t', \theta) h(x \cos \theta + y \sin \theta - t') dt'. \quad (2.29)$$

Pasando la ecuación anterior a coordenadas polares y operando, se obtiene ([2])

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} L^{-2} d\beta \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} q(\gamma, \beta) h''(\gamma' - \gamma) D \cos \gamma d\gamma, \quad (2.30)$$

donde el filtro $h''(\gamma)$ se muestrea en un intervalo ν y tiene la forma

$$h''(n\delta) = \begin{cases} \frac{1}{8\nu^2}, & n=0 \\ 0, & n=\text{par} \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi \sin n\nu} \right)^2, & n=\text{impar} \end{cases}. \quad (2.31)$$

Los problemas de implementación de este filtro son similares a los de la rampa de la ecuación 2.23 y, por consiguiente, se puede limitar frecuencialmente este filtro de la manera que lo hacían las ventanas previamente descritas. La principal diferencia entre el uso de rayos paralelos y el uso de una fuente equiangular radica en que en el segundo caso en cada barrido es posible ver al paciente de forma completa, lo que implica un algoritmo de reconstrucción más complicado y lento.

Por su parte, el muestreo equiespaciado posee la geometría de la figura 2.14. Análogamente al caso anterior, podemos identificar de forma unívoca una proyección mediante (s, β) , donde s es la distancia entre el iso-centro y la intersección de un rayo con un detector (imaginario, ver figura) y β es el ángulo de la proyección de

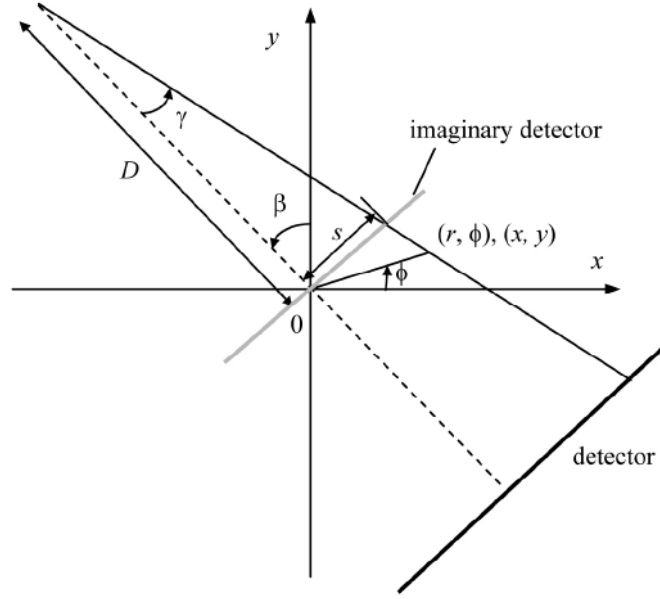


Figura 2.14: Geometría de reconstrucción por abanico de haces equiespaciados. Imagen obtenida de [2].

forma similar al caso del abanico de haces equiangulares. Se puede demostrar que la imagen reconstruida se obtiene mediante

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} U^{-2}(r, \phi, \beta) d\beta \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right) q(s, \beta) h(s' - s) ds, \quad (2.32)$$

donde

$$U(r, \phi, \beta) = \frac{D + r \cdot \sin(\beta - \phi)}{D}. \quad (2.33)$$

Igual que ocurre con los haces equiangulares, esta geometría de muestreo es más exigente computacionalmente que la geometría de rayos paralelos.

2.2.5. El algoritmo de reconstrucción iterativa

Al margen del filtro de *backprojection*, otro algoritmo de reconstrucción de imágenes que ha cobrado especial interés en las últimas décadas es el de la reconstrucción iterativa. En el algoritmo de las proyecciones filtradas, se presuponen aspectos como que la fuente es un punto infinitesimal, que en las mediciones no influyen las fluctuaciones estadísticas de los fotones y son por tanto precisas, o que los píxeles de la imagen son puntos infinitesimales que se colocan en una matriz cuadrada. Estas suposiciones, que facilitan la derivación de la base matemática del algoritmo de las proyecciones filtradas, distan mucho de la realidad. Una forma de tener en cuenta la naturaleza no ideal de los escáneres reales es el algoritmo de reconstrucción iterativa [2]. Según este esquema, el objeto escaneado se representa como un vector 2D, $\boldsymbol{\mu}$,

2.3. PRESENTACIÓN DE LA IMAGEN

y sus proyecciones mediante \mathbf{p} . Ambas variables se pueden relacionar mediante una matriz del sistema \mathbf{A} y un vector de error \mathbf{e} mediante

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{e}. \quad (2.34)$$

La matriz \mathbf{A} modela aspectos relacionados con la geometría del escáner, el espectro de la fuente de rayos X, la respuesta de los detectores y otros parámetros. Por otro lado, \mathbf{e} modela la componente continua de la medición y el ruido aditivo. Utilizando el esquema bayesiano de estimación, se puede determinar $\boldsymbol{\mu}$ maximizando la probabilidad *a posteriori* $\Pr(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{p})$:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \arg \max_{\boldsymbol{\mu}} \Pr(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{p}). \quad (2.35)$$

Siguiendo el Teorema de Bayes,

$$\Pr(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{p}) = \frac{\Pr(\mathbf{p}|\boldsymbol{\mu})\Pr(\boldsymbol{\mu})}{\Pr(\mathbf{p})}, \quad (2.36)$$

podemos expresar la igualdad 2.35 como

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \arg \max_{\boldsymbol{\mu}} [\log \Pr(\mathbf{p}|\boldsymbol{\mu}) + \log \Pr(\boldsymbol{\mu})]. \quad (2.37)$$

El algoritmo iterativo presenta ventajas como la mejor respuesta a artefactos metálicos, mejora de la calidad de imagen en presencia de pocas proyecciones y mayor rendimiento.

2.3. Presentación de la imagen

2.3.1. Visualización de la imagen de CT

Como se mostró en el apartado 2.2.1, la escala de intensidades utilizada para representar los coeficientes de atenuación del cuerpo estudiado se mide en HU. A la vista de la ecuación 2.7, se comprueba que el aire tiene un valor de -1000 HU, el agua de 0 HU, y los huesos, distintos agentes de contraste y objetos de metal valores entre varios cientos y varios miles de HUs [2]. En la tabla 2.1 se muestran valores de interés de distintos componentes del cuerpo humano [8]. Dado el amplio abanico de valores, es imposible representar este rango de números CT en un monitor con escala de grises sin comprimirlo previamente. Por ejemplo, una escala de grises de 8 bits permitiría representar 2^8 (256) niveles de intensidad distintos, por lo que un rango dinámico superior a 2000 HU debería ser comprimido por un factor de, al menos, 8. La parte izquierda de la figura 2.15 muestra un ejemplo de imagen reconstruida cuyo rango dinámico es de 2700 HU (entre -1000 HU y 1700 HU).

Material	Valores (HU)
Aire	-1000
Pulmón	-500 a -200
Grasa	-200 a -50
Agua	0
Sangre	25
Músculo	25 a 40
Hueso	200 a 1000

Tabla 2.1: Números CT de distintos componentes. Imagen obtenida de [8].

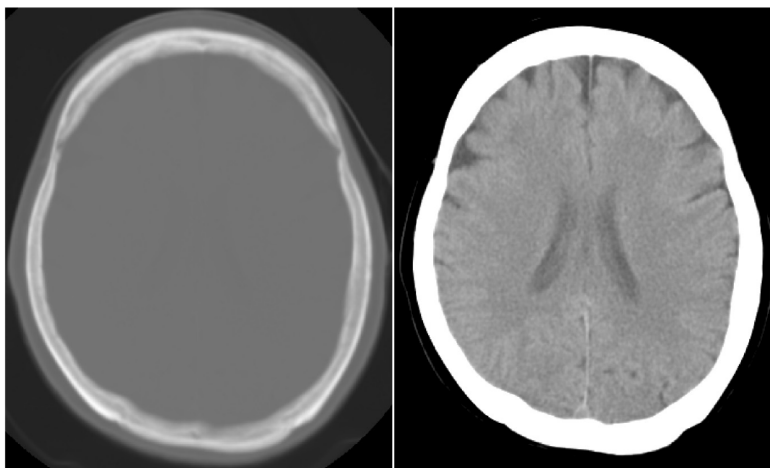


Figura 2.15: Imagen de CT del cráneo de un paciente. Imagen obtenida de [2].

Si transformáramos linealmente el rango dinámico de la imagen al rango dinámico del dispositivo de visualización, perderíamos mucha información y apenas podríamos apreciar las variaciones de intensidad en el cráneo del paciente. Como solución, las imágenes en tomografía computerizada suelen mostrarse con la siguiente escala de grises:

$$p_w(x, y) = \begin{cases} 0, & p(x, y) \leq L - \frac{W}{2} \\ \frac{p(x, y) - (L - \frac{W}{2})}{W} I_{max}, & L - \frac{W}{2} < p(x, y) \leq L + \frac{W}{2} \\ I_{max}, & p(x, y) > L + \frac{W}{2} \end{cases} \quad (2.38)$$

En esta ecuación, L es el nivel de la ventana de visualización y W es la anchura de la ventana de visualización, mientras que I_{max} es el máximo nivel de intensidad para el dispositivo de visualización (255 para uno de 8 bits). Básicamente, este proceso transforma linealmente la escala intensidad original entre $(L - \frac{W}{2}, L + \frac{W}{2})$ en la escala del dispositivo que mostrará la imagen. En la figura 2.15, la parte derecha muestra un ejemplo de transformación en el que $W = 100$ HU y $L = 20$ HU. Como vemos, los tejidos cerebrales han pasado de no distinguirse a ser claramente apreciables.

2.3. PRESENTACIÓN DE LA IMAGEN

Las transformaciones de la escala de imagen permiten flexibilidad a la hora de realzar partes concretas de la imagen. Así, en algunos casos, en lugar de realizar una transformación lineal en el intervalo correspondiente, interesa utilizar una transformación no lineal que permita modificar la apariencia de ciertas características de la imagen. La función transformadora generalmente obedece a la siguiente expresión:

$$q(x, y) = \begin{cases} G[p_w(x, y)], & t_L \leq p_w(x, y) < t_H \\ p_w(x, y), & \text{resto} \end{cases}, \quad (2.39)$$

donde $q(x, y)$ es la escala de grises tras la transformación, G la función transformadora, $p_w(x, y)$ la imagen CT reconstruida tras el proceso y t_L y t_H parámetros de la función transformadora.

2.3.2. Visualización de volumen

Pese a que generalmente las imágenes médicas se muestran como cortes bidimensionales, la tomografía computerizada permite generar volúmenes 3D a partir de la unión de varias imágenes, y viceversa. Las principales técnicas avanzadas de computación se describen a continuación.

Multiplanar reformation (MPR)

En esta técnica, se establece un sistema de coordenadas utilizando tres ejes ortogonales: izquierda-derecha, anterior-posterior y superior-inferior [2] (ver figura 2.16). Los planos empleados en MPR son sagital (paralelo a los ejes anterior-posterior y superior-inferior), coronal (paralelo a los ejes izquierdo-derecho y superior-inferior) y axial, que es perpendicular a los dos planos anteriores. Para formar volúmenes mediante MPR, las imágenes se van apilando una sobre otra en el plano axial. Cada imagen tiene un grosor determinado, y el espaciado entre imágenes consecutivas se completa mediante interpolación.

La figura 2.17 muestra un ejemplo de imágenes sagital y coronal del tronco humano obtenidas mediante MPR con una anchura de ventana $W = 800$.

Representación de volúmenes, MIP y minMIP

Una técnica de visualización que permite transformar un volumen tridimensional en una imagen bidimensional es el renderizado de volumen [2]. Esta técnica se puede entender como la aplicación de un conjunto de rayos imaginarios a través del volumen que se desea *renderizar* cuya intensidad resultante se recoge en una pantalla. La intensidad de los píxeles obtenidos se determina a partir de todos los píxeles atravesados por los rayos.

Un caso especial de representación (*rendering*) de volumen es el de la proyección de máxima intensidad (MIP). El nivel de gris seleccionado, en este caso, es aquel correspondiente al píxel de máxima intensidad que el rayo encuentra en su camino.

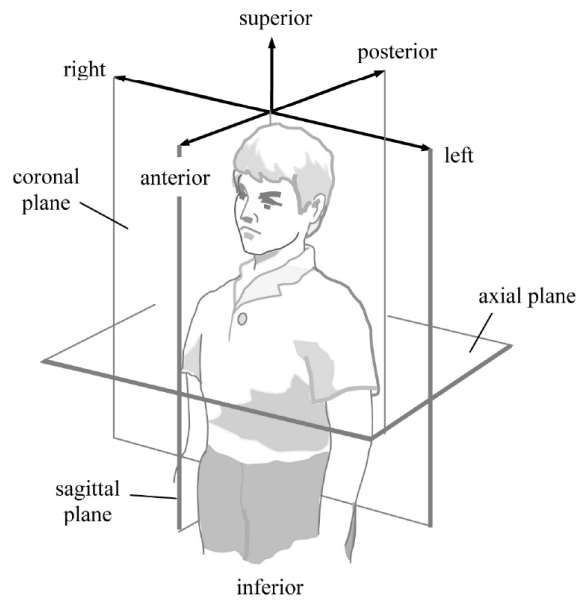


Figura 2.16: Sistema de coordenadas basado en el paciente. Imagen obtenida de [2].

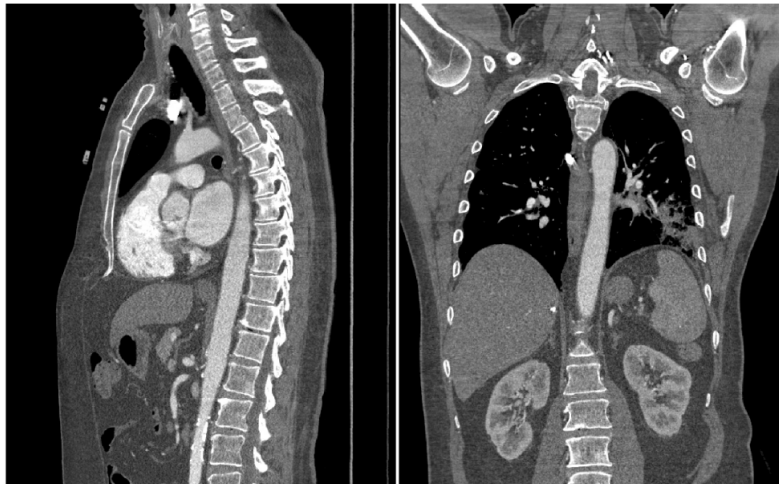


Figura 2.17: Ejemplo de imágenes MPR sagital (izquierda) y coronal (derecha). Imagen obtenida de [2].

Esto permite, por ejemplo, diferenciar mejor las estructuras vasculares. Por el contrario, la técnica de proyección de mínima intensidad selecciona el nivel mínimo de intensidad encontrado por el rayo en su trayecto, y es por ello útil para la detección de espacios aéreos en los pulmones.

Representación de superficies

Para obtener una superficie, el primer paso consiste en obtener un modelo matemático para la superficie del objeto que se desea representar [2]. Generalmente, se emplea un umbral en HU que identificará tipos de tejido según los valores obtenidos estén por encima o debajo de dicho límite. Los algoritmos de representación calculan

las coordenadas y las respectivas normas para describir la orientación de cada punto sobre la superficie. Dada una orientación y una fuente de luz, una imagen de este tipo se crea a partir de intensidades que son proporcionales a la cantidad de luz reflejada por la superficie.

2.4. Modelo de ruido en tomografía

2.4.1. Ruido de Poisson compuesto

En tomografía computerizada, varios tipos de ruido (debido a los fotones, electrónico y de cuantificación), contribuyen a degradar la imagen médica [9]. Frecuentemente se ha utilizado el modelo de ruido de Poisson en simulación de tomografía computerizada, dado que, en recepción, se asume que los detectores cuentan fotones [10]. No obstante, este modelo no es estrictamente válido debido a la naturaleza heterogénea de los rayos X generados en el transmisor. El espectro de emisión de los rayos X es el resultado de las contribuciones del voltaje aplicado en el tubo de rayos X, la radiación *bremstrahlung* debida al impacto de los electrones acelerados sobre el metal (tungsteno, en general) y el filtrado sufrido por los rayos emitidos que atraviesan el cuerpo bajo estudio. Esto hace que el espectro se componga por una parte de una distribución continua de energías debido al efecto de *bremstrahlung* y, por otra, de una distribución discreta debida a la radiación característica.

Varios estudios han tratado de modificar el modelo de Poisson intentando introducir la naturaleza polienergética de la señal emitida. Whiting (2002) en [11] deriva una función de densidad de probabilidad (pdf) para describir la estadística del proceso de detección llevado a cabo en tomografía computerizada. Su trabajo compara la distribución estadística del modelo frecuentemente utilizado de detección de fotones y el proceso real de adquisición de la señal. En un escáner real, los rayos generados, que contienen varias componentes frecuenciales, son detectados e integrados en recepción para formar una señal eléctrica que será cuantificada. El número de fotones detectados es muy variable en función del tejido que atraviesen, pudiendo ser de varios millones en caso de tener aire o grasa o, por el contrario, de varias decenas en caso de tener objetos metálicos muy atenuadores.

Como ya se ha explicado, los rayos X generados en los escáneres de tomografía se forman al provocar el impacto de electrones acelerados mediante un potencial eléctrico contra una sustancia metálica, normalmente tungsteno. Los fotones creados en este proceso mediante radiación característica y *bremstrahlung*, cuya máxima energía depende del máximo potencial eléctrico del tubo de rayos X, atraviesan los tejidos del cuerpo humano interaccionando con los átomos que se encuentran en su camino. Normalmente, el rango de energía de los fotones producidos varía entre 20 keV y 140 keV, como se refleja en la figura 2.1. Como resultado de las interacciones, una parte de esa energía generada acaba siendo detectada en recepción. La detección de cada fotón individual es un evento independiente, por lo que este proceso sigue una estadística de Poisson. Se considera el número de fotones generados, a cierta energía E , mediante $N(E)$, la probabilidad de que no sean absorbidos al atravesar

el material mediante $T(E)$ y la probabilidad de que sean detectados mediante $A(E)$. Entonces, el número medio de fotones detectados es igual a

$$\lambda(E) = N(E) \cdot T(E) \cdot A(E). \quad (2.40)$$

La probabilidad de medir un número determinado Q de fotones para una distribución de Poisson es

$$P(Q, \lambda) = \frac{\lambda^Q e^{-\lambda}}{Q!} \quad (2.41)$$

o, de forma equivalente, mediante la función característica

$$C(f, \lambda) = \exp(\lambda(e^{if} - 1)), \quad (2.42)$$

siendo $P(Q, \lambda)$ y $C(f, \lambda)$ el par transformado de Fourier.

Por otro lado, el detector integra toda las energías detectadas para formar una señal

$$S = \int_0^\infty gE\lambda(E)dE, \quad (2.43)$$

donde $g \cdot E$ es el factor de peso, proporcional a la energía E , que modela la amplificación de señal en los detectores de escáneres de CT.

La función característica total, teniendo en cuenta la suma ponderada de todos los procesos individuales, será el producto

$$C(f, \lambda) = \exp\left(\int_0^{klVp} \lambda(E)(e^{igEf} - 1)dE\right). \quad (2.44)$$

La pdf de la señal detectada es igual a la transformada de Fourier de 2.44. Se puede demostrar que

$$pdf(C(f, \lambda)) = \mathfrak{F}(C(f, \lambda)) = e^{-Q_T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda \left(\frac{S}{g}\right)\right)^{k\otimes}}{k!}, \quad (2.45)$$

donde Q_T es la media de todos los fotones medidos y $k\otimes$ representa la convolución del espectro detectado k veces. La pdf anterior obedece a un proceso de Poisson compuesto, resultado de la suma ponderada de convoluciones del espectro de rayos X [11]. De la anterior expresión se deduce que si se tiene un espectro monoenergético ($\lambda(E) = \delta(E - E_0)$) la pdf se reduce a la distribución estándar de Poisson con media Q_T . Por otro lado, teniendo en cuenta el Teorema del Límite Central, los términos correspondientes a un gran número de convoluciones se aproximarán a una función Gaussiana de desviación típica $\sqrt{k}\sigma$, con σ^2 la varianza del espectro original. La pdf teórica calculada mediante la transformada de Fourier de la función característica y su comparación con la pdf experimental obtenida por Whiting en adquisiciones reales revela la existencia del modelo de ruido de Poisson compuesto. Además, Whiting concluye de forma experimental que efectivamente para una relación señal a ruido

2.4. MODELO DE RUIDO EN TOMOGRAFÍA

(SNR) baja, la pdf es asimétrica y similar a una distribución de Poisson, mientras que para SNR altas se aproxima a una función Gaussiana.

A partir del modelo de Poisson compuesto de Whiting, otros estudios han utilizado funciones conocidas para representar la componente independiente en dicho modelo y aproximar el espectro de rayos X generado. En [10], Fan *et al.* (2010) utilizan el espectro de un escáner real para estimar la componente independiente. Considerando que X es una V.A. que modela la energía transmitida, N la V.A. que representa el número de fotones detectados en un intervalo de tiempo (distribución de Poisson de media λ), e Y la V.A. que da cuenta de los fotones totales recibidos, es posible obtener la media de la V.A. de Poisson compuesta como sigue:

$$E(Y) = E(E(Y|N)) = E(NE(X)) = E(N)E(X) = \lambda E(X). \quad (2.46)$$

Análogamente, la varianza se obtiene mediante:

$$\text{var}(Y) = E(\text{var}(Y|N)) + \text{var}(E(Y|N)) = \lambda(\text{var}(X)) + E(X)^2 = \lambda E(X^2). \quad (2.47)$$

Como aproximación estadística, se proponen los modelos Gaussiano, de Poisson y Gamma para la componente independiente del proceso de Poisson compuesto. El estudio concluye que los dos momentos de primer orden se pueden aproximar mediante el espectro real obtenido en el detector, y principalmente tiene aplicación en el ámbito de la reconstrucción iterativa de imagen mediante el algoritmo de máxima verosimilitud.

En este trabajo se propone un ajuste con variables aleatorias Gamma para modelar los valores de las HU contenidas en la imagen. Es decir, que se está suponiendo que el modelo de ruido en recepción se modifica por medio de operadores lineales de tal manera que en la reconstrucción no se pierde la naturaleza asimétrica de la distribución (con skewness positivo) y que la combinación lineal de distribuciones Gamma se puede aproximar bien por otra distribución Gamma.

Capítulo 3

Estimación probabilística de los distintos tejidos en imágenes TAC

En este capítulo se describe la anatomía pulmonar y se propone el modelo de mezclas de variables aleatorias Gamma para caracterizar los píxeles de la imagen en tomografía de pulmón. A partir de medidas de error, se demuestra el correcto ajuste de este modelo con los datos experimentales. Mediante el algoritmo EM, se realiza una estimación real de los parámetros que componen la mezcla de una imagen de test.

3.1. Histología pulmonar

El sistema respiratorio se compone de una serie de órganos y estructuras cuya función es extraer oxígeno del aire inspirado para incorporarlo a la sangre y expulsar el CO₂ generado en las células como producto del metabolismo [12]. Está formado por el tracto respiratorio, los músculos utilizados para respirar y la parte cerebral que controla el proceso de respiración.

El tracto respiratorio está compuesto por los pulmones, las zonas de intercambio de gases (oxígeno y dióxido de carbono) y las estructuras tubulares que transportan el aire hasta los pulmones, lugar donde se produce el intercambio de gases. Se conoce como parénquima pulmonar a la porción funcional de los pulmones en la que se intercambian los gases, formada por los alvéolos, los vasos sanguíneos y el tejido conjuntivo. Los bronquiolos, por otro lado, constituyen las cavidades aéreas más pequeñas en que se subdividen los pulmones, conectados a los alvéolos. Es de vital importancia que estos tejidos se encuentren en perfecto estado para que la respiración se produzca correctamente. Cuando se produce un alargamiento permanente de los espacios aéreos distales a los bronquiolos pulmonares (que puede llegar a romper sus paredes), se habla de enfisema pulmonar, y la consecuencia es la inutilización crónica de parte de este tejido [1]. En las figuras 3.1 y 3.2 se puede observar la anatomía del pulmón y una imagen pulmonar obtenida mediante tomografía computerizada.

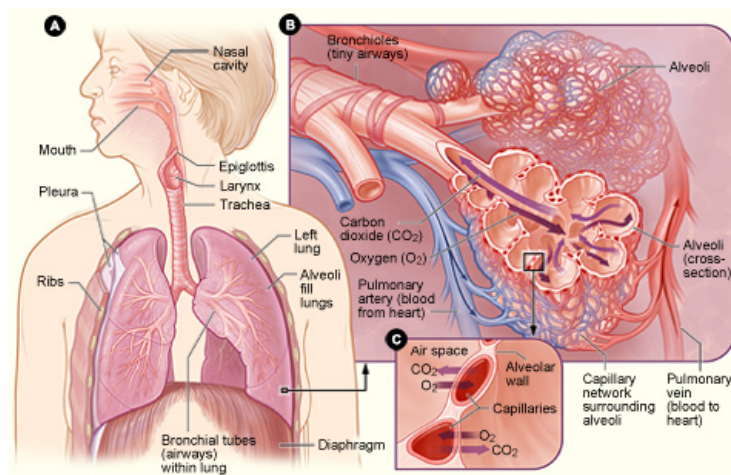


Figura 3.1: Anatomía del pulmón. Imagen obtenida de [12].

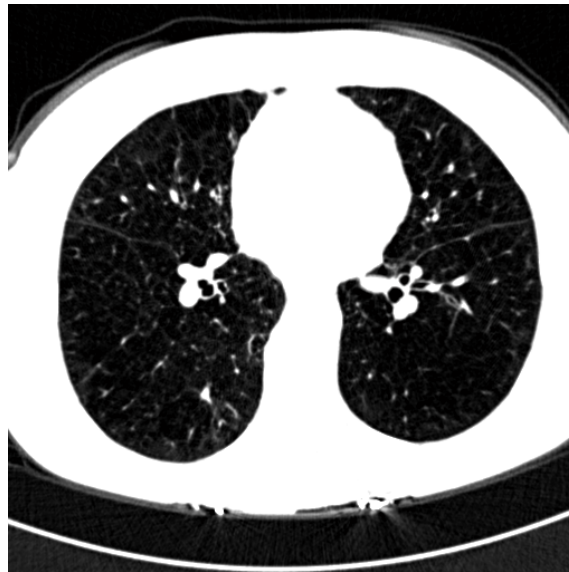


Figura 3.2: Imagen axial de TAC pulmonar.

3.2. Estimación bayesiana mediante el algoritmo EM

3.2.1. Enfoque bayesiano del problema

Para la caracterización de las muestras de la imagen pulmonar se va a emplear la filosofía bayesiana de estimación. Dado que cada muestra proviene de la contribución de varias distribuciones Gamma de distintos parámetros, se trata de obtener mediante la función de máxima verosimilitud los parámetros de la Gamma asociada a cada muestra.

El esquema de estimación Bayesiana consiste en establecer una regla de decisión

3.2. ESTIMACIÓN BAYESIANA MEDIANTE EL ALGORITMO EM

$\delta(x)$ que, dado un conjunto de muestras observadas $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, permita obtener un valor a que sea la estimación de un valor real s [13]. Dado que las decisiones dependen de un grado de incertidumbre, es necesario cuantificar las consecuencias de las mismas. Esto se consigue mediante el coste de decisión $L(s, a)$ siendo el valor real de la estimación s y el valor obtenido a . Empleando como función de coste la función "0/1", ésta viene definida por:

$$L_\epsilon(s, a) = \begin{cases} 1, & |s - a| \geq \epsilon \\ 0, & |s - a| < \epsilon \end{cases} \quad (3.1)$$

Cuando el error es infinitamente pequeño, $\epsilon \rightarrow 0$, el criterio de decisión óptimo se corresponde con

$$\delta_{MAP}(\mathbf{x}) = \arg \max_{d \in S} p_S(d|\mathbf{x}), \quad (3.2)$$

que es el estimador de *máximo a posteriori* (MAP). La importancia de este estimador radica en que a través de los datos se puede obtener el valor más probable de s . Desarrollando la probabilidad $p_S(d|\mathbf{x})$ mediante el Teorema de Bayes se llega a la siguiente igualdad:

$$p_S(d|\mathbf{x}) = \frac{f_{\mathbf{X}}(x|d)p_S(d)}{f_{\mathbf{X}}(x)}. \quad (3.3)$$

donde la probabilidad *a priori*, $p_S(s)$, es una función de densidad de probabilidad que nos permite introducir cierta información conocida de antemano acerca del parámetro real a estimar, y $f_{\mathbf{X}}(x|s)$ es la función de verosimilitud de las muestras condicionadas al parámetro a estimar.

En el caso de imágenes de tomografía computerizada que nos ocupa, se va a emplear dicho estimador para estimar los parámetros de las mezclas que componen la imagen y, dado que $p_S(d|\mathbf{x})$ va a ser una función monótona creciente (ver sección 3.4), maximizarla es equivalente a maximizar su logaritmo:

$$\delta_{MAP}(\mathbf{x}) = \arg \max_{d \in S} \{\log f_{\mathbf{X}}(x|d) + \log p_S(d)\}. \quad (3.4)$$

Como ya se ha dicho, el enfoque bayesiano considera a los parámetros de la función variables aleatorias a las que asigna una distribución de probabilidad *a priori*. Por tanto, para el caso de mezclas Gamma el vector de parámetros a estimar será $\Phi = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_J; \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_J)$. Suponiendo que X son muestras independientes e idénticamente distribuidas (IID) de una variable aleatoria (VA), la función de verosimilitud condicionada a un valor determinado de θ es

$$f_X(\mathbf{x}|\Phi) = \prod_{i=1}^N \sum_{j=1}^J p_j f_X(x_i|\theta_j). \quad (3.5)$$

Para maximizar el logaritmo de esta función de verosimilitud se va a utilizar el algoritmo EM (*Expectation-Maximization*).

3.2.2. El algoritmo EM

El nombre del algoritmo EM, propuesto por A. Dempster, N. Laird y D. Rubin en 1977, se debe a que cada iteración del mismo consiste en un paso de expectación seguido de un paso de maximización (E-step y M-step) [14]. El paso de expectación se da con respecto a las variables desconocidas, utilizando la estimación de los parámetros condicionados a las muestras observadas. El paso de maximización, por su parte, realiza una nueva estimación de los parámetros. Y ambos pasos se repiten hasta conseguir la convergencia [15].

De manera general, el algoritmo EM parte de un conjunto Y de observaciones aleatorias que no es completo (algunas variables no son conocidas), donde $\mathbf{y} \in R^n$ es una muestra de Y . Por otro lado, X es el conjunto completo de datos que se observan a través de Y , es decir, mediante $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$. La función de densidad de probabilidad (pdf) conjunta de los datos es $f_X(\mathbf{x}|\theta)$, donde $\theta \in \Theta$ es el conjunto de parámetros a estimar. Por otro lado, la pdf de los datos incompletos es

$$g(\mathbf{y}|\theta) = \int_{X/Y} f_X(\mathbf{x}|\theta) d\mathbf{x}. \quad (3.6)$$

donde se marginaliza la distribución conjunta respecto a las variables observables (i.e. se eliminan las contribuciones de las variables del conjunto X/Y).

En el caso que nos ocupa, las variables no conocidas son precisamente aquellas que identifican a las muestras como pertenecientes a una componente de la mezcla de distribuciones, mientras que las muestras conocidas son las intensidades propias (en HUs).

Considerando $L_y(\theta) = \log g(\mathbf{y}|\theta)$ como la función de log-verosimilitud, el objetivo del algoritmo EM consiste en encontrar un θ que maximice la esperanza matemática de $\log f_X(\mathbf{x}|\theta)$. Como no se dispone directamente de los datos \mathbf{x} , maximizamos la función anterior mediante \mathbf{y} junto con la estimación actual θ . Esta maximización se divide en dos pasos:

E-step

Sea $\theta^{[k]}$ la estimación de los parámetros en la k -ésima iteración. En este paso se debe calcular

$$Q(\theta|\theta^{[k]}) = E[\log f_X(\mathbf{x}|\theta)|\mathbf{y}, \theta^{[k]}]. \quad (3.7)$$

M-step

Sea ahora $\theta^{[k+1]}$ la estimación de los parámetros en la $k + 1$ -ésima iteración:

$$\theta^{[k+1]} = \arg \max_{\theta} Q(\theta|\theta^{[k]}). \quad (3.8)$$

3.3. COMPARACIÓN ENTRE MODELOS GAMMA Y NORMAL

El algoritmo EM consiste en elegir un $\theta^{[k]}$ inicial y repetir estos dos pasos hasta que se produzca la convergencia. Para determinar si ésta se ha producido, se examinan los cambios en el valor de θ en iteraciones consecutivas. Si $\|\theta^{[k+1]} - \theta^{[k]}\| < \epsilon$ para un valor ϵ prefijado, se habrá producido la convergencia de θ .

3.3. Comparación entre modelos Gamma y Normal

3.3.1. El modelo Gaussiano

Una variable aleatoria (VA) X sigue una distribución normal (Gaussiana) de parámetros μ y σ si su función de densidad de probabilidad (fdp) es [16]:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.9)$$

La pertenencia a este tipo de distribución se expresa mediante $X \sim N(\mu, \sigma)$, donde el primer término es la media y el segundo la desviación típica. En la siguiente figura se representan distintas fdp en función de los parámetros característicos de la distribución:

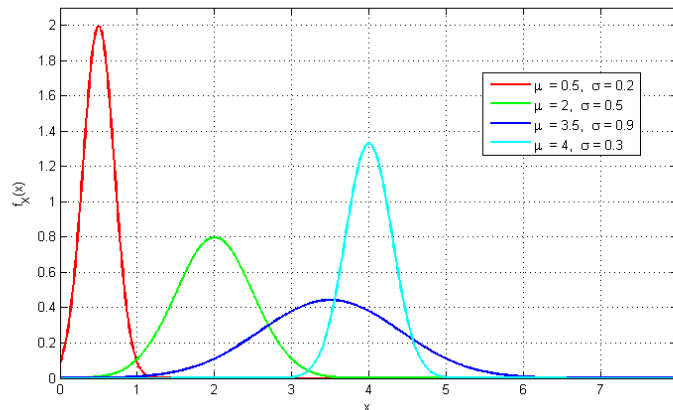


Figura 3.3: Función de densidad Normal para distintos valores de μ y σ .

Las VA Gaussianas son muy utilizadas en problemas prácticos y nosotros comprobaremos en qué grado se aproximan las HU de los tejidos a esta distribución.

3.3.2. La función de distribución Gamma

La función de densidad de probabilidad de una VA Gamma es [17]:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0 \text{ y } \alpha, \beta > 0, \quad (3.10)$$

3.3. COMPARACIÓN ENTRE MODELOS GAMMA Y NORMAL

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Euler-Gamma, definida mediante

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \text{ para } \alpha > 0. \quad (3.11)$$

En una VA Gamma, el parámetro α da cuenta de la forma de la fdp y el parámetro β de su escala. En el apartado 3.3.3, se realiza una estimación de los valores α y β en función de las muestras de la imagen para el modelo de mezcla de Gammas. A continuación se muestra una gráfica de la función de densidad de probabilidad de una VA Gamma para distintos parámetros α y β :

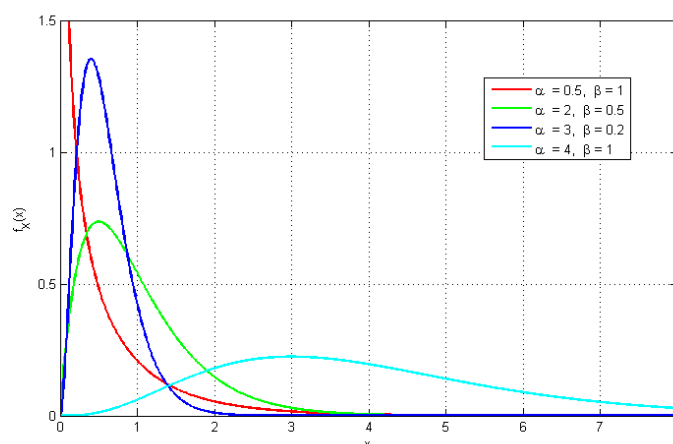


Figura 3.4: Función de densidad Gamma para distintos valores de α y β .

Especial interés tienen la media y la varianza características de la variable Gamma, que nos servirán para clasificar los diferentes tejidos, y cuyos valores son:

$$\begin{cases} \mu_{GAMMA} = \alpha\beta \\ \sigma_{GAMMA}^2 = \alpha\beta^2 \end{cases} \quad (3.12)$$

3.3.3. Métricas de Kolmogorov-Smirnov y divergencia de Kullback-Leibler

Con objeto de decidir qué distribución teórica se ajusta mejor a la función de densidad de probabilidad práctica, se ha realizado en MATLAB[®] una estimación de las fdp Normal, Gamma y experimental y se ha comparado el grado de similitud entre la tercera y las dos primeras. Como métricas de error, se ha elegido la norma a infinito, o estadístico de *Kolmogorov-Smirnov*, y la divergencia de *Kullback-Leibler*.

3.3. COMPARACIÓN ENTRE MODELOS GAMMA Y NORMAL

Divergencia de *Kullback-Leibler*

La divergencia de *Kullback-Leibler* es una medida asimétrica de la diferencia entre dos distribuciones de probabilidad, definida como [17]:

$$D_{KL}(f_{EMP}, f_X) = \sum_{i=1}^N f_{EMP}(i) \log \frac{f_{EMP}(i)}{f_X(i)}, \quad (3.13)$$

donde f_{EMP} es la función de densidad de probabilidad estimada de los datos (empírica) y f_X es la función teórica cuyo ajuste queremos probar (Gamma o Normal). La función f_{EMP} se obtiene a través del histograma de las muestras, mientras que los parámetros de las funciones Gamma y Normal se obtienen mediante una estimación de máxima verosimilitud de los datos implementada por MATLAB.

Estadístico de *Kolmogorov-Smirnov*

La distancia de *Kolmogorov-Smirnov* es la norma uniforme de la función de distribución acumulada (cdf). Independiente de la estimación de las pdf, se puede calcular con pocas muestras y se define como

$$D_{KS} = \sup |\hat{F}_{EMP}(i) - F_X(i)|, \quad (3.14)$$

donde \hat{F}_{EMP} es la cdf empírica de los datos y F_X es la homónima teórica (Gamma o Normal).

Resultados del ajuste

Los tests se han realizado también en MATLAB utilizando un *phantom* cuyo esquema es el que se observa en la figura 3.5. La imagen consta de 9 zonas diferenciadas por los valores que toman los píxeles, al igual que ocurre en una imagen real de pulmón, donde los distintos tejidos dan como resultado diferentes HUs y, por tanto, diferentes intensidades de píxel. La distribución Gamma se ha centrado en valores de -1024 HUs para asegurar que puede describir los valores de atenuación negativos.

La figura 3.6 muestra las distancias de *Kolmogorov-Smirnov* y las divergencias de *Kullback-Leibler* obtenidas en las distintas zonas que componen el *phantom* de test.

Como se observa, en el caso de la D_{KL} los resultados obtenidos son prácticamente idénticos en ambas distribuciones. No obstante, atendiendo a la D_{KS} , se observa que la distribución Gamma ajusta mejor que la Normal en casi todas las zonas evaluadas, y por ello la métrica de error es menor. Por consiguiente, a la vista de los resultados queda claro que la función que mejor describe la distribución de los píxeles es la Gamma no centrada.

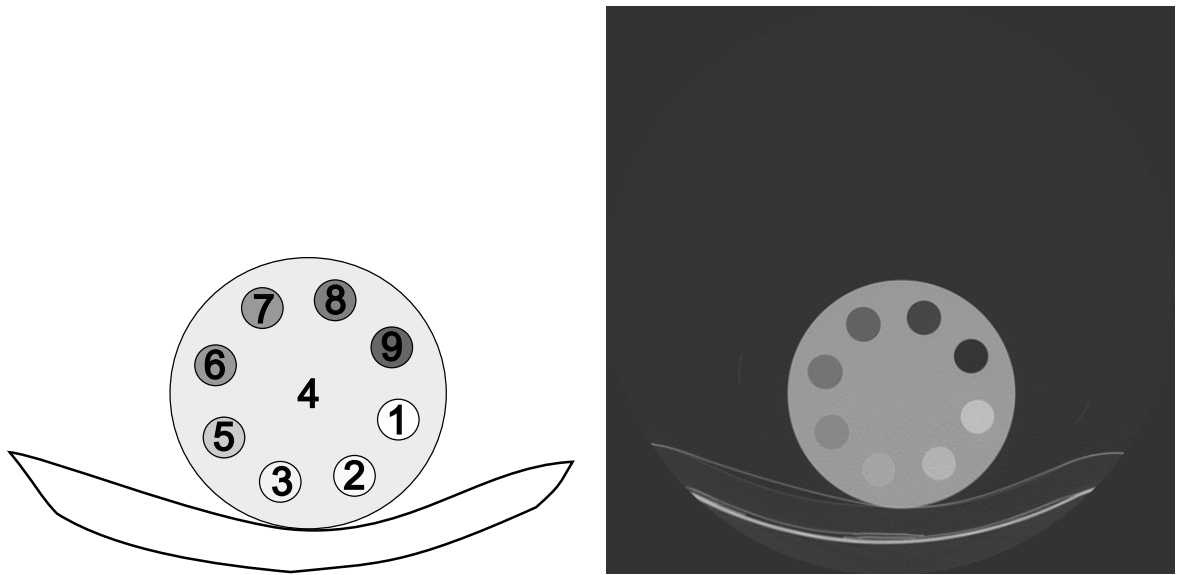


Figura 3.5: Imagen del *phantom* utilizado en los tests.

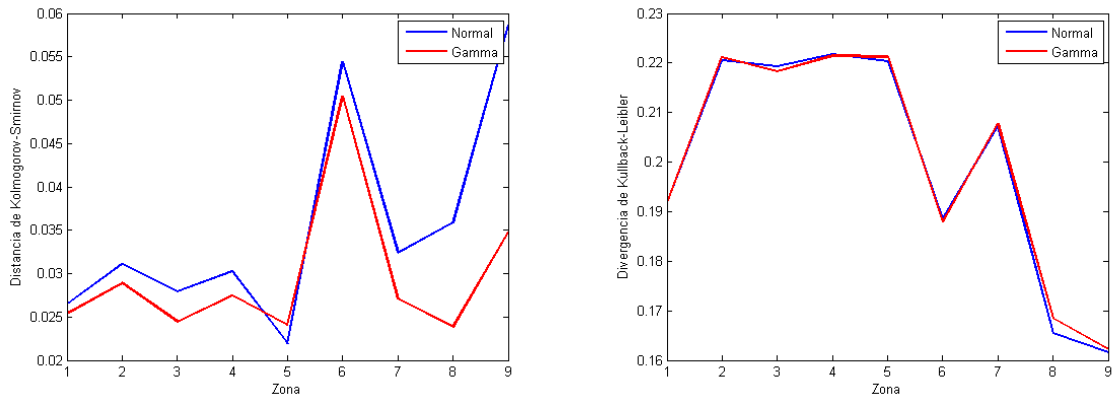


Figura 3.6: Métricas de error.

3.4. El modelo de mezclas Gamma

Pese a que en el apartado 3.3.3 se comprobó que la distribución que mejor ajusta es la Gamma, nosotros hemos decidido modelar las HU mediante la mezcla de VAs Gamma. El motivo de esta elección se debe a que este modelo ha demostrado ser válido en la caracterización de imágenes médicas de pulmón donde se presentan distintas respuestas procedentes de varios tejidos que contribuyen simultáneamente a la intensidad de píxel debido a la resolución limitada de la tomografía computerizada por rayos X. A este fenómeno se le denomina *efecto de volumen parcial* y puede modelarse matemáticamente por medio de mezclas de distribuciones [18].

Por otro lado, sabemos que el ruido presente en los detectores es de Poisson compuesto y, aunque no sabemos exactamente qué transformaciones sufre este modelo al formar la imagen mediante el filtro de *backprojections*, podemos suponer que el

3.4. EL MODELO DE MEZCLAS GAMMA

operador que se aplica es lineal y que las intensidades de pixel son combinaciones lineales de variables aleatorias distribuidas como Poisson compuestas, que son modelables como Gammas especialmente para niveles bajos de atenuación, donde el pulmón tiene su ventana de atenuación.

Según el modelo de mezclas Gamma, la distribución global de la imagen viene de las contribuciones de J distribuciones Gamma, ponderadas por unos pesos correspondientes. Consideremos $\mathbf{x} = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$ un conjunto de muestras (intensidades de los píxeles) de la imagen de tomografía [17]. Estas muestras se pueden considerar VAs independientes e idénticamente distribuidas (IID) por la naturaleza del proceso de obtención de dichas muestras. Como se dijo antes, el modelo de mezclas Gamma (GMM) considera que estas VA proceden de la contribución de J distribuciones, de forma que la función de densidad de cada muestra es

$$p(x_i|\Theta) = \sum_{j=1}^J \pi_j f_X(x_i|\Theta_j), \quad (3.15)$$

donde Θ es el vector de parámetros del GMM $(\pi_1, \dots, \pi_J, \Theta_1, \dots, \Theta_J)$ y $\Theta_j = (\alpha_j, \beta_j)$ son los parámetros de la pdf j -ésima. Por tanto, cada muestra x_i pertenece con una probabilidad π_j a cada una de las pdf Gamma (ver ecuación 3.10) que componen la mezcla. Además, se debe cumplir que $\sum_{j=1}^J \pi_j = 1$ para que $p(x_i|\Theta)$ sea una distribución de probabilidad bien definida.

Dado que tratamos con muestras IID, su función de distribución conjunta será

$$p(\mathbf{X}|\Theta) = \prod_{i=1}^N p(x_i|\Theta). \quad (3.16)$$

Con objeto de caracterizar individualmente la pertenencia de cada muestra a los distintos tipos de distribución, se utilizan las variables ocultas $\mathbf{Z} = \{Z_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Una muestra x_i pertenecerá a una distribución j cuando $Z_i = j$. A partir de estas variables ocultas el modelo va a definir una función de log-verosimilitud (ecuación 3.18) que habrá que maximizar. Como solución, se ha elegido el método de maximización *Expectation-Maximization* (EM), cuya filosofía se describió en el apartado 3.2.2. Considerando $\Theta^{(n)}$ una estimación de los parámetros de la mezcla en la iteración n -ésima, el primer paso del algoritmo EM consiste en calcular el valor esperado ($E\{\cdot\}$) de la función de log-verosimilitud $\mathcal{L}(\Theta|\mathbf{X}, \mathbf{Z})$:

$$Q(\Theta|\Theta^{(n)}, \mathbf{X}) = E_{\mathbf{Z}|\Theta^{(n)}, \mathbf{X}} \{ \mathcal{L}(\Theta|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \}. \quad (3.17)$$

El segundo paso del algoritmo consistirá en maximizar la esperanza hallada en la ecuación 3.17 para obtener una nueva estimación $\Theta^{(n)}$. Este proceso se repite hasta que se cumple cierta condición, como $\|\Theta^{(n+1)} - \Theta^{(n)}\| < th$, donde th es un umbral predeterminado.

El cálculo de la esperanza de la función de log-verosimilitud con respecto a las variables ocultas \mathbf{Z} conocidos \mathbf{x} y $\Theta^{(n)}$ es

$$\begin{aligned}
 Q(\Theta|\Theta^{(n)}, \mathbf{x}) &= E_{Z|\Theta^{(n)}, \mathbf{x}} \{ \mathcal{L}(\Theta|\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \} \\
 &= \sum_{i=1}^N E_{Z_i|\Theta^{(n)}, x_i} \{ \log p(x_i|\Theta_{Z_i}, Z_i = z_i) + \log p(Z_i = z_i|\Theta) \} \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J p(Z_i = j|x_i, \Theta^{(n)}) (\log p(x_i|\Theta_j) + \log \pi_j),
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

siendo $\pi_j = p(Z_i = j|\Theta)$ la probabilidad de que la muestra x_i pertenezca a la clase j . Según el Teorema de Bayes, se puede escribir $p(Z_i = j|x_i, \Theta^{(n)})$ como

$$\gamma_{i,j} = p(Z_i = j|x_i, \Theta^{(n)}) = \frac{p(x_i|\Theta_j^{(n)})p(Z_i = j|\Theta^{(n)})}{f_X(x_i|\Theta^{(n)})}, \tag{3.19}$$

donde

$$\sum_{j=1}^J p(x_i|\Theta_j^{(n)})p(Z_i = j|\Theta^{(n)}) = \sum_{j=1}^J \pi_j f_X(x_i|\Theta_j^{(n)}). \tag{3.20}$$

Dado que 3.18 se compone de dos términos, éstos se van a maximizar por separado. Teniendo en cuenta que se debe cumplir que $\sum_{j=1}^J \pi_j = 1$, se va a emplear un multiplicador de *Lagrange* para el término dependiente de π_j . La nueva función de *Lagrange* que se obtiene es

$$\Lambda_1(\pi, \lambda) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J \gamma_{i,j} \log \pi_j + \lambda \left(\sum_{j=1}^J \pi_j - 1 \right). \tag{3.21}$$

Derivando respecto a π_j e igualando a cero en 3.21,

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial \pi_j} = \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_{i,j}}{\pi_j} + \lambda \sum_{i=1}^N 1 = \frac{J}{\pi_j} \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} + \lambda J = 0 \tag{3.22}$$

y, simplificando,

$$\sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} = -\lambda \pi_j. \tag{3.23}$$

Sumando ambos términos en j , se obtiene

$$\lambda = -N, \tag{3.24}$$

por lo que, finalmente,

$$\hat{\pi}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p(Z_i = j|\Theta) \tag{3.25}$$

3.4. EL MODELO DE MEZCLAS GAMMA

nos da una estimación de los valores de los pesos π_j .

La otra condición que se debe satisfacer es que $\mu_j = \alpha_j \beta_j$. Es decir, que sintonizamos las medias de las mezclas a densidades conocidas de los tejidos que se esperan visualizar (e.g. músculo, sangre, grasa). Por ello, se añade al término restante el nuevo multiplicador de *Lagrange*. La nueva función es

$$\begin{aligned} \Lambda_2(\alpha, \beta, \lambda) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J \gamma_{i,j} p(x_i | \Theta_j) + \lambda_j (\alpha_j \beta_j - \mu_j) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J \gamma_{i,j} \left[(\alpha_j - 1) \log x_i - \frac{x_i}{\beta_j} - \alpha_j \log \beta_j - \log \Gamma(\alpha_j) \right] + \lambda_j (\alpha_j \beta_j - \mu_j) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Derivando 3.26 respecto a λ_j e igualando a cero, obtenemos

$$\frac{\partial \Lambda_2}{\partial \lambda_j} = \alpha_j \beta_j - \mu_j = 0. \quad (3.27)$$

Despejando, llegamos a la estimación de β :

$$\hat{\beta}_j = \frac{\mu_j}{\alpha_j}. \quad (3.28)$$

Si derivamos ahora respecto a β_j ,

$$\frac{\partial \Lambda_2}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \left(\frac{x_i}{\beta_j^2} - \frac{\alpha_j}{\beta_j} \right) + \lambda_j \alpha_j = 0, \quad (3.29)$$

simplificando obtenemos

$$\lambda_j = \frac{-1}{\alpha_j} \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \left(\frac{x_i}{\beta_j^2} - \frac{\alpha_j}{\beta_j} \right). \quad (3.30)$$

Por otro lado, hacemos lo propio con α_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \alpha_j} &= \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \left(\log x_i - \log \beta_j - \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} \Gamma(\alpha_j) \psi(\alpha_j) \right) + \lambda_j \beta_j \\ &= \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} (\log x_i - \log \beta_j - \psi(\alpha_j)) + \lambda_j \beta_j = 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ es la función *Digamma*.

Sustituyendo 3.28 en 3.31:

$$\frac{\partial \Lambda_2}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} (\log x_i - \log \mu_j + \log \alpha_j - \psi(\alpha_j)) + \lambda_j \frac{\mu_j}{\alpha_j} = 0. \quad (3.32)$$

A continuación, al sustituir 3.28 en 3.30

$$\lambda_j = \frac{-1}{\alpha_j} \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \left(\frac{x_i \alpha_j^2}{\mu_j^2} - \frac{\alpha_j^2}{\mu_j} \right) = \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \left(\frac{\alpha_j}{\mu_j} - \frac{x_i \alpha_j}{\mu_j^2} \right) \quad (3.33)$$

y este último término en 3.32, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \alpha_j} &= \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} (\log x_i - \log \mu_j + \log \alpha_j - \psi(\alpha_j)) + \frac{\mu_j}{\alpha_j} \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \left(\frac{\alpha_j}{\mu_j} - \frac{x_i \alpha_j}{\mu_j^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \log x_i - \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \log \mu_j + \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \log \alpha_j - \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \psi(\alpha_j) + \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} - \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \frac{x_i}{\mu_j} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Finalmente, ordenando los elementos de la igualdad llegamos a la ecuación no lineal de α_j :

$$\sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} (\log \alpha_j - \psi(\alpha_j)) = \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \log \mu_j - \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \log x_i - \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} + \sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \frac{x_i}{\mu_j}, \quad (3.35)$$

que en forma compacta queda como sigue:

$$\log \alpha_j - \psi(\alpha_j) = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \frac{x_i}{\mu_j}}{\sum_{i=1}^N \gamma_{i,j}} - \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{i,j} \log \frac{x_i}{\mu_j}}{\sum_{i=1}^N \gamma_{i,j}} - 1. \quad (3.36)$$

A partir de la estimación $\hat{\alpha}_j$ que maximiza la función de máxima verosimilitud, es posible obtener de inmediato $\hat{\beta}_j$ de la ecuación 3.28.

La ecuación que rige el comportamiento de α , $\log \alpha - \psi(\alpha) = K$, con K una constante, no tiene una solución cerrada. Sin embargo, se puede resolver por métodos numéricos, dado que $f(x) = \log(x) - \psi(x)$ tiene un buen comportamiento. Las gráficas de las funciones logaritmo y digamma se pueden observar en la figura 3.7.

Siguiendo un procedimiento análogo al de Vegas-Sánchez-Ferrero *et al.* (2014) en [19], se puede demostrar que, en la función $\log(x) - \psi(x) = K$, K es siempre positiva¹.

¹Este resultado se debe principalmente a que la función $x - \log(x) \geq 1$ para todo $x \geq 0$.

3.5. EJEMPLO DE MEZCLA DE NUEVE COMPONENTES

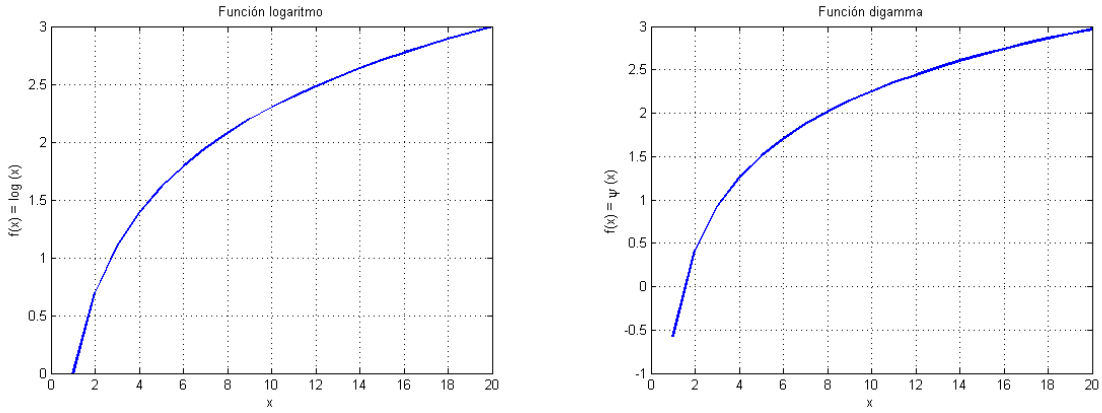


Figura 3.7: Funciones $\log(x)$ y $\psi(x)$.

Dado que la función $\log(x) - \psi(x)$ es continua, estrictamente decreciente y cumple

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) - \psi(x) = \infty \quad (3.37)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) - \psi(x) = 0 \quad (3.38)$$

Por tanto, aplicando el Teorema de Bolzano concluimos que existe una solución única para $\hat{\alpha}_j$ en la ecuación 3.36 [20].

3.5. Ejemplo de mezcla de nueve componentes

En la sección anterior se demostró que el modelo de mezcla de VA Gamma representa fielmente los tipos de tejidos encontrados en el pulmón. A continuación se estiman, mediante la implementación del algoritmo *Expectation Maximization* en MATLAB de nuestro modelo de mezclas, las distintas pdf encontradas en el *phantom* de prueba mostrado en 3.5.

La figura 3.8 muestra los ajustes de las Gammas no centradas obtenidos a los distintos niveles de atenuación en nuestro *phantom*. Como vemos, se obtienen las nueve funciones de distribución de probabilidad que caracterizan cada una de las nueve zonas del phantom. Dado que las HU de los distintos tejidos del cuerpo humano son parámetros conocidos (ver tabla 2.1), el empleo de estos valores en el modelo de mezcla de Gammas mejora el ajuste de las pdf obtenidas.

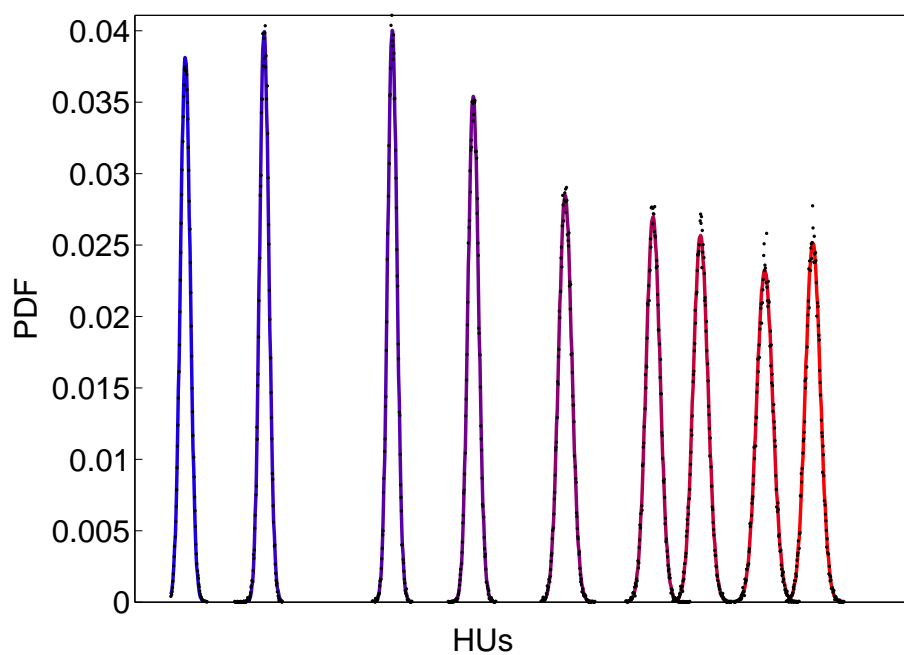


Figura 3.8: Funciones de densidad de probabilidad estimadas del *phantom*.

Capítulo 4

Estabilización de varianza

El modelo de ruido de Poisson compuesto es el que rige a la entrada de los detectores del escáner de CT. No obstante, el procesado posterior sufrido por la señal recibida para formar la imagen no garantiza que en los píxeles el ruido obedezca al modelo anterior. Como solución, se ha decidido modelar este ruido como una mezcla de Gammas. Según este modelo, se comprueba que el ruido varía espacialmente en la imagen. En este capítulo, se propone una transformación de la fdp correspondiente a dichas Gamma con objeto de estabilizar la varianza.

4.1. Introducción

El ruido de Poisson compuesto, debido a la naturaleza polienergética de los rayos X generados, degrada la calidad de la imagen reconstruida en la tomografía computerizada. La presencia de este ruido conlleva la falta de precisión en la estimación de los tejidos pulmonares, lo que puede provocar problemas a la hora de detectar tumores u otras enfermedades.

Existen estudios en la literatura que han tratado antes el problema del ruido de Poisson compuesto. Así, Simar (1976) en [21] propone un algoritmo de máxima verosimilitud para estimar la la distribución independiente del proceso de Poisson compuesto a partir de observaciones independientes. Se demuestra en su trabajo la existencia y convergencia del estimador obtenido y se presenta un ejemplo numérico de uso del algoritmo.

Por su parte, en el ámbito de la tomografía, Lu *et al.* (2001) en [22] analizan los datos obtenidos repetidas veces de un *phantom* para determinar las propiedades del ruido presente en la imagen. El análisis estadístico muestra que el ruido varía no linealmente y tiene una varianza dependiente de la señal. Para estabilizar la varianza, proponen una transformación logarítmica teniendo en cuenta la relación entre la media y la varianza de los datos. Aplicando esta transformación, hacen la varianza constante y eliminan el ruido aplicando un filtro de Wiener, obteniendo buenos resultados.

Goossens *et al.* (2006) en [23] proponen un método para estimar el mapa de ruido variable asumiendo ruido aditivo, blanco, Gaussiano no estacionario. El ruido se separa de la señal mediante la transformada wavelet considerando que la subbanda alta-alta sólo contiene ruido.

En [24], Wang *et al.* (2006) proponen un esquema de mínimos cuadrados ponderados por penalización para la reducción de ruido en sinogramas helicoidales de tomografía computerizada. No obstante, suponen que distribución de ruido en el sinograma se puede considerar gaussiana después de la calibración del sistema.

Estudios posteriores como el de Xu y Tsui (2007) en [25] aproximan las estadísticas del ruido de Poisson compuesto mediante una subclase del modelo de dispersión exponencial. Este modelo representa una distribución compuesta de Poisson con componentes distribuidas mediante Gammas y es de utilidad en la reconstrucción iterativa de imagen.

Como conclusión, los principales métodos de estimación de ruido del estado del arte referidos a ruido espacialmente variante poseen inconvenientes como no proponer un modelo exacto de ruido presente en la imagen de tomografía tras el filtro de *backprojection*. Esta falta de precisión conlleva la ausencia de un esquema consistente de filtrado de ruido en este tipo de imágenes. A continuación, se propone en este trabajo un método que permite solucionar la problemática expuesta. Previamente, se demuestra la dependencia espacial de la varianza que motiva el desarrollo de este método.

Para estabilizar la varianza, es conveniente primeramente hallar la relación entre la media y la varianza, antes de aplicar la transformación correspondiente [26]. De forma general, suponiendo que

$$\sigma_X^2 = f(\mu), \quad (4.1)$$

donde σ_X^2 es la varianza en la escala original de mediciones de X y $E\{X\} = \mu$ [27]. Entonces, para cualquier función $g(x)$ se tiene

$$\sigma_g^2 = \left(\frac{dg}{d\mu}\right)^2 f(\mu), \quad (4.2)$$

y, dado que σ_g^2 debe ser una constante, C , tras la transformación,

$$g(\mu) = \int \frac{C d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}. \quad (4.3)$$

En nuestro caso, de la caracterización de la distribución de los píxeles mediante mezcla de VA Gamma se deduce que la varianza tiene dependencia espacial. En concreto, se cumple que

$$\sigma^2 = \alpha\beta^2 \quad (4.4)$$

4.2. PARTICULARIZACIÓN PARA LA DISTRIBUCIÓN GAMMA

y que

$$\mu = \alpha\beta. \quad (4.5)$$

Por tanto,

$$\sigma^2 = \mu\beta, \quad (4.6)$$

lo que demuestra que en la imagen la varianza se puede expresar como función de la media, que varía espacialmente.

4.1.1. Transformación de variables aleatorias

La transformación de VA consiste en definir una función $y = g(x)$ sobre una VA \mathbf{X} cuya función de densidad $f_X(x)$ es conocida [16]. El resultado de la transformación es una nueva variable $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$.

Para la obtención de la función de densidad de la nueva VA \mathbf{Y} , se puede hacer uso del *Teorema de cambio de variable* siempre que la función $f_X(x)$ sea inyectiva [28]:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d\{g^{-1}(y)\}}{dy} = f_X(x) \left. \frac{dx}{dy} \right|_{x=g^{-1}(y)}. \quad (4.7)$$

Una vez realizada la transformación, se puede caracterizar la nueva VA a través de su media y varianza.

4.2. Particularización para la distribución Gamma

En el caso que nos ocupa, se supone que el ruido es una VA Gamma de parámetros α y β . Como hemos mostrado, existe una relación directa entre la media y la varianza de dicha VA Gamma, de forma que $\sigma^2 = \mu\beta$.

Se ha elegido como transformación la función

$$y = g(x) = \sqrt{x}, \quad (4.8)$$

dado que tras aplicar esta escala el decaimiento de la señal pasa a ser cuadrático y la distribución, pese a ser Gamma generalizada, se parece mucho a una Gaussiana. Por tanto, en la nueva fdp que vamos a obtener la relación entre x e y será

$$x = g^{-1}(y) = y^2, \quad y \geq 0. \quad (4.9)$$

Partiendo de la pdf de una VA Gamma, que repetimos aquí por conveniencia:

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0 \text{ y } \alpha, \beta > 0. \quad (4.10)$$

Dado que la función de transformación, definida en la ecuación 4.8, es derivable e inyectiva, podemos hacer uso del Teorema de cambio de variable para transformar la fdp mostrada en 4.10. Por un lado, la derivada de la función de transformación será

$$\frac{d\{g^{-1}(y)\}}{dy} = \frac{d\{y^2\}}{dy} = 2y. \quad (4.11)$$

Por tanto, aplicando el Teorema Fundamental 4.7,

$$f_Y(y) = \frac{y^{2(\alpha-1)} e^{-y^2/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} 2y = \frac{2 y^{2\alpha-1} e^{-y^2/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, \quad y \geq 0 \text{ y } \alpha, \beta > 0. \quad (4.12)$$

4.2.1. Caracterización de la nueva distribución

La nueva distribución obtenida gracias a la transformación 4.8 se conoce como Gamma generalizada. De forma general, la fdp de una distribución Gamma generalizada viene definida mediante [29]:

$$f_X(x; a, d, p) = \frac{p x^{d-1} e^{-(x/a)^p}}{a^d \Gamma(\frac{d}{p})}, \quad x \geq 0 \text{ y } a, d, p > 0. \quad (4.13)$$

En el caso que nos ocupa, vemos que efectivamente 4.12 es una Gamma generalizada de parámetros $p = 2$, $a = \sqrt{\beta}$ y $d/p = \alpha$:

$$f_X(x) = \frac{2 x^{2\alpha-1} e^{-(x/\sqrt{\beta})^2}}{\sqrt{\beta}^{2\alpha} \Gamma(\alpha)} = \frac{2 x^{2\alpha-1} e^{-x^2/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0 \text{ y } \alpha, \beta > 0. \quad (4.14)$$

Por tanto, vamos a hallar la media y la varianza de la distribución anterior para poder tipificarla. De esta forma la varianza estará estabilizada y podremos aplicar el filtro correspondiente para eliminar el ruido.

Se puede demostrar que los momentos de orden r se pueden calcular por la expresión [29]:

$$m_r = E\{X^r\} = \beta^{r/2} \frac{\Gamma(\frac{2\alpha+r}{2})}{\Gamma(\alpha)} \quad (4.15)$$

Por tanto, la media que buscamos es

$$E\{X\} = \sqrt{\beta} \frac{\Gamma(\frac{2\alpha+1}{2})}{\Gamma(\alpha)}. \quad (4.16)$$

4.2. PARTICULARIZACIÓN PARA LA DISTRIBUCIÓN GAMMA

Análogamente, la varianza de esta variable es igual a [30]:

$$\text{Var} \{X\} = E\{X^2\} - E\{X\}^2 = \beta \frac{\Gamma(\frac{2\alpha+2}{2})}{\Gamma(\alpha)} - \left(\sqrt{\beta} \frac{\Gamma(\frac{2\alpha+1}{2})}{\Gamma(\alpha)} \right)^2. \quad (4.17)$$

4.2. PARTICULARIZACIÓN PARA LA DISTRIBUCIÓN GAMMA

Capítulo 5

Esquemas de filtrado de ruido no estacionario

La transformación de la distribución realizada en la sección anterior nos ha permitido obtener una distribución Gamma generalizada y caracterizarla mediante su media y varianza. En este capítulo, se demuestra que se puede aproximar esta nueva distribución por una Gaussiana, se realiza una estandarización de la nueva VA y se proponen dos esquemas de filtrado del ruido aditivo blanco gaussiano que contamina la imagen: el filtro non-local means y el algoritmo BM3D. Finalmente, se comparan los resultados obtenidos por ambos.

5.1. Estandarización de la nueva V.A.

Hemos mostrado en la sección anterior la media y varianza de la nueva VA obtenida tras la transformación, que pertenece a la familia de distribuciones Gamma generalizada. Esta distribución, por su forma, converge de forma más rápida que la Gamma no centrada hacia una gaussiana generalizada. Estamos en condiciones por tanto de tipificar la nueva VA a través de su media y varianza, que repetimos aquí por conveniencia:

$$E \{X\} = \sqrt{\beta} \frac{\Gamma(\frac{2\alpha+1}{2})}{\Gamma(\alpha)}. \quad (5.1)$$

$$Var \{X\} = E \{X - E \{X\}\}^2 = \beta \frac{\Gamma(\frac{2\alpha+2}{2})}{\Gamma(\alpha)} - \left(\sqrt{\beta} \frac{\Gamma(\frac{2\alpha+1}{2})}{\Gamma(\alpha)} \right)^2. \quad (5.2)$$

La figura 5.1 muestra una comparativa entre las distribuciones Gamma, Gamma generalizada y normal. Para obtener la media y la varianza de la VA gaussiana a partir de α y β se han empleado las ecuaciones 5.1 y 5.2.

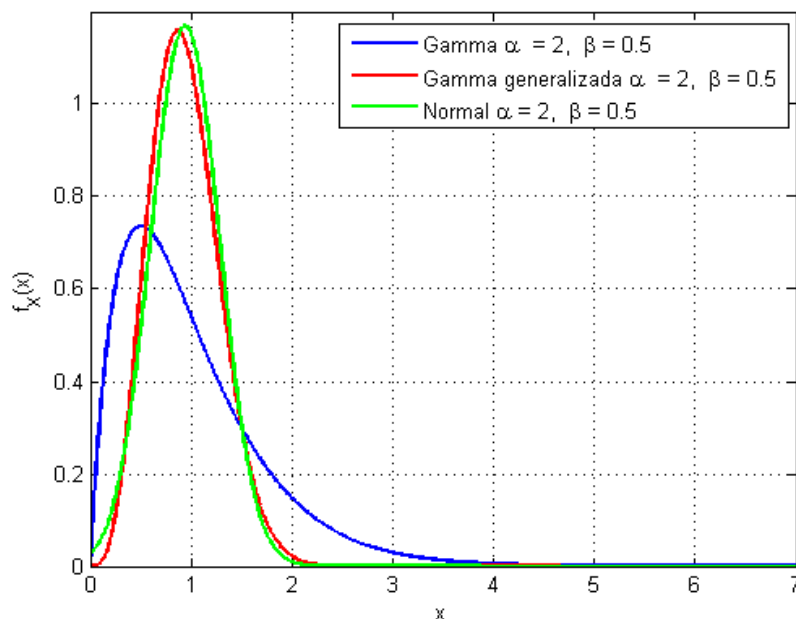


Figura 5.1: Comparativa entre distribuciones Gamma, Gamma generalizada y Normal.

Como vemos, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la nueva VA se aproxima bastante bien a una gaussiana. Por tanto, vamos a estandarizar esta variable normal mediante el cambio

$$Z = \frac{X - E\{X\}}{\sqrt{Var\{X\}}} = \frac{X - \mu}{\sigma}. \quad (5.3)$$

De esta forma, podemos modelar el ruido existente en la imagen mediante

$$I(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) + N(\mathbf{x}; 0; \sigma^2(\mathbf{x})) = A(\mathbf{x}) + N(\mathbf{x}; 0; 1), \quad (5.4)$$

donde $A(\mathbf{x})$ es la componente de la imagen libre de ruido y $N(\mathbf{x}; 0; \sigma^2(\mathbf{x}))$ es ruido aditivo Gaussiano de media nula y varianza unitaria.

5.1.1. Resultados de la estabilización

Se ha implementado la estabilización del ruido del *phantom* en MATLAB. Como se aprecia en las figuras 5.2 y 5.3, la transformación de la pdf y su posterior estandarización consigue eliminar la dependencia espacial de la varianza del ruido. La imagen 5.3 muestra mediante un mapa de color los valores de la varianza existente en la imagen. Se aprecia claramente en la parte derecha de la imagen, donde la mayoría de muestras poseen un color muy similar, que se alcanza el primer objetivo propuesto en este trabajo de homogeneizar los valores de ruido.

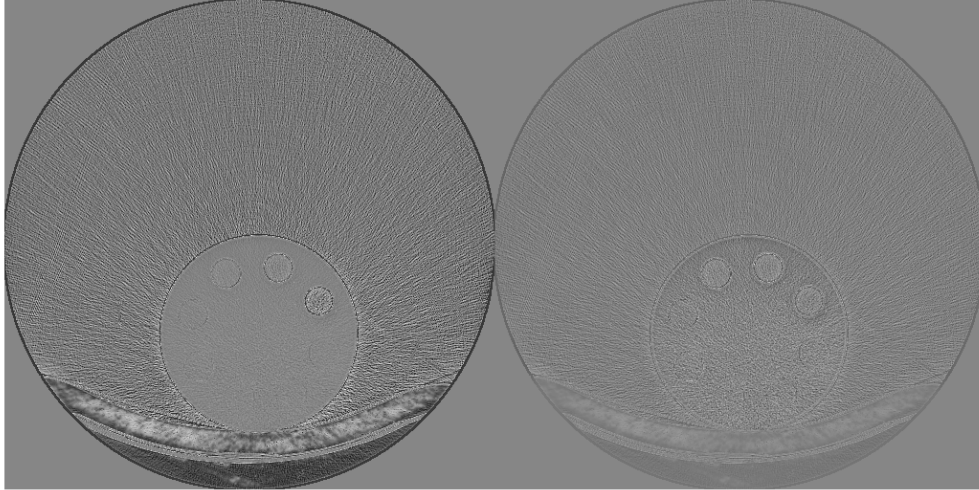


Figura 5.2: Resultados obtenidos tras la estabilización del ruido. Ruido presente en la imagen original (izqda.) y ruido estabilizado (dcha.).

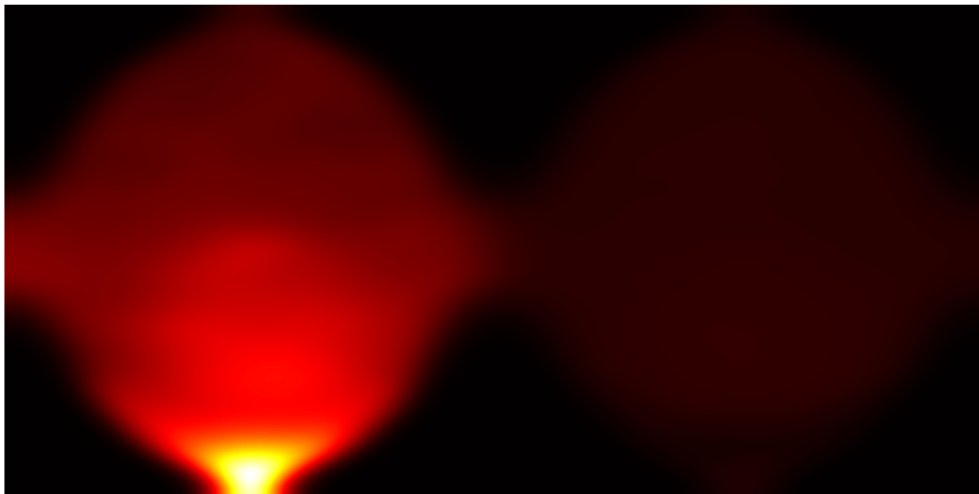


Figura 5.3: Estabilización de la varianza. Varianza en la imagen original (izqda.) y varianza tras la estabilización (dcha.).

5.2. Filtrado mediante el filtro non-local means

Nuestro objetivo es de eliminar el ruido aditivo, blanco, y Gaussiano presente en la imagen (ver modelo de la ecuación 5.4). La mayoría de métodos de la literatura que suprimen este tipo de ruido comparten una propiedad común: el uso de la media para filtrar el ruido. En este trabajo, se ha elegido el filtro non-local means, propuesto por Buades *et al.* (2005) en [31], por demostrar un buen funcionamiento en las condiciones de ruido presentes.

5.2.1. Implementación del filtro non-local means

Dada una imagen I de n píxeles, tal que $I = \{I(i), i = 1, \dots, n\}$, el valor estimado para el i -ésimo píxel se calcula según

$$\hat{I}(i) = \sum_{j \in I} \omega(i, j) I(j), \quad (5.5)$$

donde los pesos $\omega(i, j)$ dependen del grado de similitud entre los píxeles i y j , cumpliéndose que $0 \leq \omega(i, j) \leq 1$ y $\sum_j \omega(i, j) = 1$. El grado de similitud en cuestión depende del parecido entre los vectores de intensidad del nivel de gris $I(N_i)$ e $I(N_j)$, donde N_k representa el cuadrado de píxeles vecinos centrado en k .

La similitud se mide mediante la distancia euclídea

$$E \{ \|I(N_i) - I(N_j)\|_{2,a}^2 \} = \|u(N_i) - u(N_j)\|_{2,a}^2 + 2\sigma^2, \quad (5.6)$$

donde $a > 0$ es la desviación típica del *kernel* Gaussiano.

Los pesos se calculan mediante

$$\omega(i, j) = \frac{1}{Z(i)} e^{-\frac{\|I(N_i) - I(N_j)\|_{2,a}^2}{h^2}}, \quad (5.7)$$

donde

$$Z(i) = \sum_j e^{-\frac{\|I(N_i) - I(N_j)\|_{2,a}^2}{h^2}} \quad (5.8)$$

es la constante que normaliza y h es el parámetro que determina el grado de filtrado.

5.2.2. Resultados

Se ha aplicado en MATLAB el filtro non-local means optimizado por Tristán-Vega *et al.* (2012) en [32], obteniéndose los resultados que se muestran en la figura 5.4. Se observa que el filtro non-local means se comporta mejor en presencia de estabilización de varianza. Se puede apreciar en la imagen inferior derecha que tras la estabilización las zonas procesadas son más homogéneas que en caso de no estabilizar el ruido. Esto es debido a que el filtro non-local means, en caso de no estabilizar, utiliza promedios de regiones de píxeles que tienen distinta varianza. En cambio, al estabilizar se consigue homogeneizar el ruido, y con ello las muestras pasan a tener valores de varianza muy parecidos independientemente de su localización dentro de la imagen, lo que mejora el rendimiento del filtro.

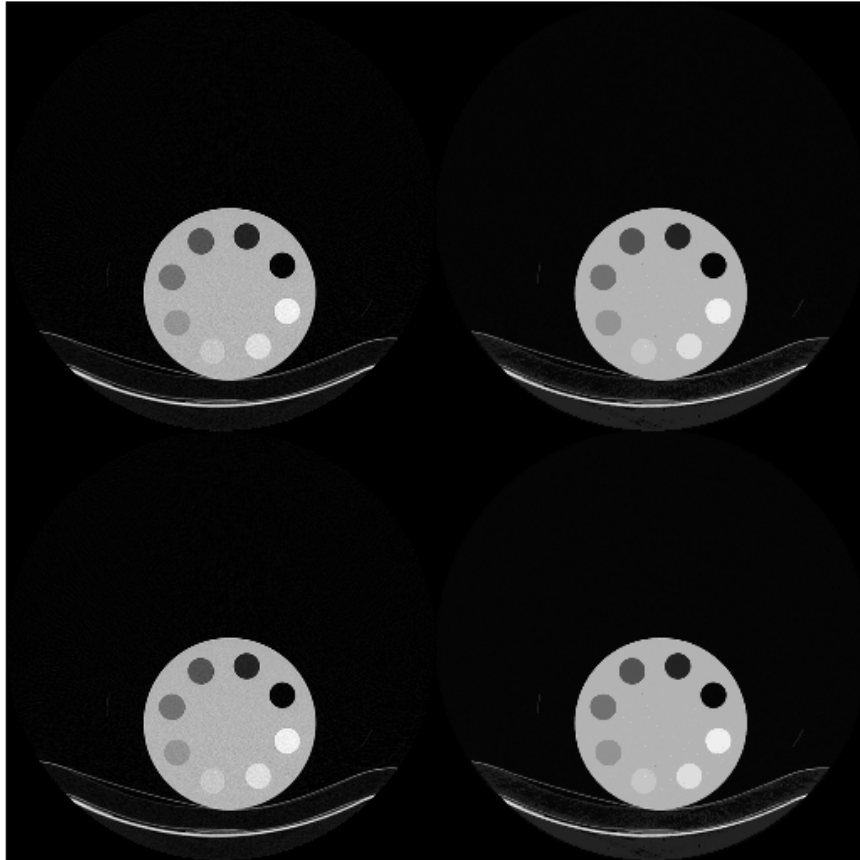


Figura 5.4: Resultados obtenidos mediante el filtro non-local means. Parte superior: imagen original del *phantom* (izqda.) e imagen con varianza estabilizada (dcha.). Parte inferior: filtrado del *phantom* sin estabilizar (izqda.) y tras estabilización (dcha.).

5.3. Filtrado mediante el algoritmo BM3D

Por otro lado, se va a emplear el filtro BM3D (*Block-Matching and 3D filtering*), propuesto por Dabov *et al.* (2007) en [33]. Este esquema de filtrado se basa en los conceptos de *agrupamiento* y *filtrado colaborativo*. El *agrupamiento* consiste en seleccionar bloques 2D de la imagen que se encuentran próximos espacialmente, y formar con ellos un vector 3D apilando dichos bloques. El objetivo con esto es aprovechar las similitudes existentes dentro de cada grupo, como la correlación o la afinidad, para estimar el valor real de señal dentro de cada grupo y poder utilizarlo en el *filtrado colaborativo*. A continuación se describen más detalladamente estos pasos.

5.3.1. Agrupamiento por bloques

El agrupamiento de los distintos bloques se puede realizar de distintas formas: cluster de *K-means*, mapas auto-organizados, etc. Generalmente, el grado de similitud entre las muestras vecinas se evalúa mediante el inverso de medidas de distancia, siguiendo una filosofía similar a las métricas usadas en el apartado 3.3.3 (cuanto menor es la distancia, mayor es la similitud). La mayoría de métodos agrupan las muestras (píxeles) de la imagen en grupos disjuntos, de forma que un píxel sólo puede pertenecer a un grupo. Además, todas las muestras dentro de cada grupo reciben el mismo trato, por lo que las muestras más próximas al centroide están mejor representadas que las que distan más de él [33].

El algoritmo BM3D, a diferencia de los anteriores, propone un método de selección más efectivo basado en emparejar bloques en lugar de píxeles de forma que los grupos obtenidos no sean necesariamente disjuntos. Básicamente, el algoritmo compara cada bloque o conjunto de píxeles, independientemente de su localización dentro de la imagen, con un valor de referencia y lo añade al grupo correspondiente si la distancia entre ambos es menor que cierto umbral.

5.3.2. Filtrado colaborativo mediante simplificación

El filtrado colaborativo permite, dado un grupo de n bloques, obtener n estimaciones. Este proceso se denomina colaborativo ya que cada grupo interviene en el filtrado del resto. Dado un grupo 3D de bloques que contienen muestras similares, el filtrado colaborativo se realiza a través de los siguientes pasos:

1. Se aplica una transformación lineal 3D al grupo.
2. Se simplifican los coeficientes resultantes de la transformación para atenuar el ruido.
3. Se invierte la transformación realizada en el primer paso para obtener las estimaciones de todos los bloques.

5.3.3. Implementación del algoritmo BM3D

El algoritmo se implementa en dos pasos bien diferenciados:

Estimación básica

En primer lugar, se buscan bloques de píxeles que son similares al que se está procesando actualmente y se apilan juntos en un vector 3D. En segundo lugar, se aplica una transformación 3D al grupo completo de bloques, se atenúa el ruido simplificando los coeficientes transformados mediante *hard-thresholding* y se invierte la transformación para obtener las estimaciones de los bloques. Por último, se realiza la agregación, calculando la estimación mediante la media ponderada de todas las estimaciones bloque a bloque.

5.3. FILTRADO MEDIANTE EL ALGORITMO BM3D

Particularizando para nuestro modelo, cuya ecuación repetimos a continuación por conveniencia:

$$I(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) + N(\mathbf{x}; 0; \sigma^2(\mathbf{x})) = A(\mathbf{x}) + N(\mathbf{x}; 0; 1). \quad (5.9)$$

Primeramente, considerando B el bloque que se está procesando actualmente, cuyas dimensiones son $k_{hard} \times k_{hard}$ [34]. Se buscan en la imagen original ruidosa $I(\mathbf{x})$ bloques Q de dimensiones $n_{hard} \times n_{hard}$ similares al bloque de referencia B . El conjunto de estos bloques se puede expresar mediante

$$\mathcal{B}(B) = \{Q : d(B, Q) \leq \psi_{hard}\}, \quad (5.10)$$

donde ψ_{hard} es el umbral de distancia para d según el cual se pueden considerar dos bloques similares (y, por tanto, agruparlos conjuntamente). Por otro lado,

$$d(B, Q) = \frac{\|\gamma(B) - \gamma(Q)\|_2^2}{(k_{hard})^2} \quad (5.11)$$

es la distancia cuadrática normalizada entre bloques y γ es el operador de *hard thresholding* con umbral $\lambda_{hard} \sigma$, con σ^2 la varianza del ruido Gaussiano. El proceso selecciona los coeficientes cuyo valor absoluto es menor que el umbral anterior y los pone a cero, manteniendo los valores del resto de coeficientes.

A continuación, el grupo 3D se forma al apilar todos los bloques $\mathcal{B}(B)$ encontrados. Una vez que se dispone del bloque tridimensional $\mathcal{B}(B)$, se realiza el filtrado colaborativo. Para ello, se aplica una transformación lineal tridimensional y se simplifican los coeficientes obtenidos. El proceso de estimación finaliza con la anti-transformación del grupo 3D:

$$\mathcal{B}(B)_{hard} = \psi_{hard}^{-1}(\tau(\psi_{hard}(\mathcal{B}(B)))), \quad (5.12)$$

donde τ es el operador de *hard thresholding* con umbral $\lambda_{hard}\sigma$:

$$\tau(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq \lambda_{hard}\sigma \\ x, & \text{resto} \end{cases}. \quad (5.13)$$

Finalmente, en la fase de agregación, las estimaciones obtenidas se almacenan:

$$\forall Q \in \mathcal{B}(B), \forall x \in Q, \begin{cases} \nu(x) = \nu(x) + \omega_{hard,B} u_{hard,Q,B}(x) \\ \delta(x) = \delta(x) + \omega_{hard,B} \end{cases}, \quad (5.14)$$

donde ν y δ representan, respectivamente, el numerador y el denominador obtenidos al final de la estimación básica, y $u_{hard,Q,B}(x)$ es la estimación del valor del píxel x perteneciente al bloque Q obtenida durante el filtrado colaborativo del bloque de referencia B . Por su parte,

$$\omega_{hard,B} = \begin{cases} N_{hard,B}^{-1}, & N_{hard,B} \geq 1 \\ 1, & \text{resto} \end{cases}, \quad (5.15)$$

siendo $N_{hard,B}$ el número de coeficientes que mantienen su valor distinto de cero tras la etapa de *hard thresholding*.

La estimación básica obtenida tras este primer paso es

$$u_{basica}(x) = \frac{\sum_B \omega_{hard,B} \sum_{Q \in \mathcal{B}(B)} \chi_Q(x) u_{hard,Q,B}(x)}{\sum_B \omega_{hard,B} \sum_{Q \in \mathcal{B}(B)} \chi_Q(x)}, \quad (5.16)$$

donde $\chi_Q(x) = 1$ si y sólo si $x \in Q$, siendo 0 en caso contrario.

Estimación final

Primeramente, se buscan, al igual que en el paso anterior, bloques similares al que se está procesando actualmente. Empleando estos bloques y los de la estimación básica, se crean dos grupos (dos vectores 3D), uno con datos de la imagen ruidosa y otro con datos de la estimación básica. A continuación, se realiza una transformación 3D a ambos grupos, se aplica un filtro de Wiener al grupo de bloques de la imagen ruidosa utilizando el espectro de energía de la estimación básica. Finalmente, se realiza la transformación inversa para obtener estimaciones de los bloques y se mejora la precisión de la estimación agregando los datos análogamente a como se hace en la estimación básica.

Siguiendo con el desarrollo expuesto para la estimación básica, el primer paso para obtener la estimación final consiste en formar dos grupos de bloques similares. Uno relacionado con la estimación básica,

$$\mathcal{B}_{basica}(B) = \{Q : d(B, Q) \leq \psi_{wiener}\}, \quad (5.17)$$

y otro obtenido a partir de la imagen ruidosa, $\mathcal{B}(B)$.

El filtrado colaborativo se realiza ahora mediante un filtro de Wiener,

$$\mathcal{B}_{wiener}(B) = \psi_{wiener}^{-1}(\omega_B \cdot \psi_{wiener}(\mathcal{B}(B))), \quad (5.18)$$

donde los coeficientes del filtro son

$$\omega_B(\xi) = \frac{|\psi_{wien}(\mathcal{B}_{basica}(B))(\xi)|^2}{|\psi_{wien}(\mathcal{B}_{basica}(B))(\xi)|^2 + \sigma^2}. \quad (5.19)$$

Finalmente, de forma análoga al caso de la estimación básica, se almacenan las estimaciones de todos los píxeles:

$$\forall Q \in \mathcal{B}(B), \forall x \in Q, \begin{cases} \nu(x) = \nu(x) + \omega_{wiener,B} u_{wiener,Q,B}(x) \\ \delta(x) = \delta(x) + \omega_{wiener,B} \end{cases}, \quad (5.20)$$

donde ν y δ representan, respectivamente, el numerador y el denominador obtenidos al final de la estimación final, y $u_{wiener,Q,B}(x)$ es la estimación del valor del píxel x

5.4. COMPARATIVA ENTRE AMBOS FILTROS

pertenciente al bloque Q obtenida durante el filtrado colaborativo del bloque de referencia B . Por su parte,

$$\omega_{wiener,B} = \|\omega_B\|_2^{-2}. \quad (5.21)$$

La estimación final obtenida es

$$u_{final}(x) = \frac{\sum_B \omega_{wiener,B} \sum_{Q \in \mathcal{B}(B)} \chi_Q(x) u_{wiener,Q,B}(x)}{\sum_B \omega_{wiener,B} \sum_{Q \in \mathcal{B}(B)} \chi_Q(x)}, \quad (5.22)$$

y $\chi_Q(x)$ toma los mismos valores que en la estimación básica.

5.3.4. Resultados

Los resultados de aplicar el algoritmo BM3D implementado en MATLAB por Dabov *et al.* (2007) en [33] se muestran en la figura 5.5. En la figura se observa que el filtro BM3D, al igual que el non-local means, mejora los resultados en caso de estabilizar la varianza.

5.4. Comparativa entre ambos filtros

Con objeto de comparar el rendimiento de los dos filtros propuestos, se ha elegido como ratio la relación señal a ruido de pico (*Peak Signal-to-Noise Ratio*) existente entre las imágenes filtradas y un *phantom* libre de ruido, generado artificialmente en MATLAB.

La figura 5.6 muestran los resultados obtenidos en cada una de las zonas del *phantom*. Podemos ver que la PSNR es mayor para el algoritmo BM3D que para el filtro non-local means. Esto se debe a que, como se describió en el funcionamiento del algoritmo BM3D, éste a diferencia del non-local means no sólo compara píxeles próximos espacialmente, sino que utiliza distintos factores y niveles de descomposición a la hora de agruparlos. De esta forma, consigue adaptarse mejor a la estimación de los valores reales de la imagen. Si nos fijamos en cada filtro individualmente, vemos que se mejora notablemente la PSNR al emplear estabilización: como se indicó anteriormente, al conseguir que el ruido presente en la imagen sea similar para todas las muestras, se hace más fiable la estimación real de los valores de las muestras al emplear filtros basados en el cálculo de medias.

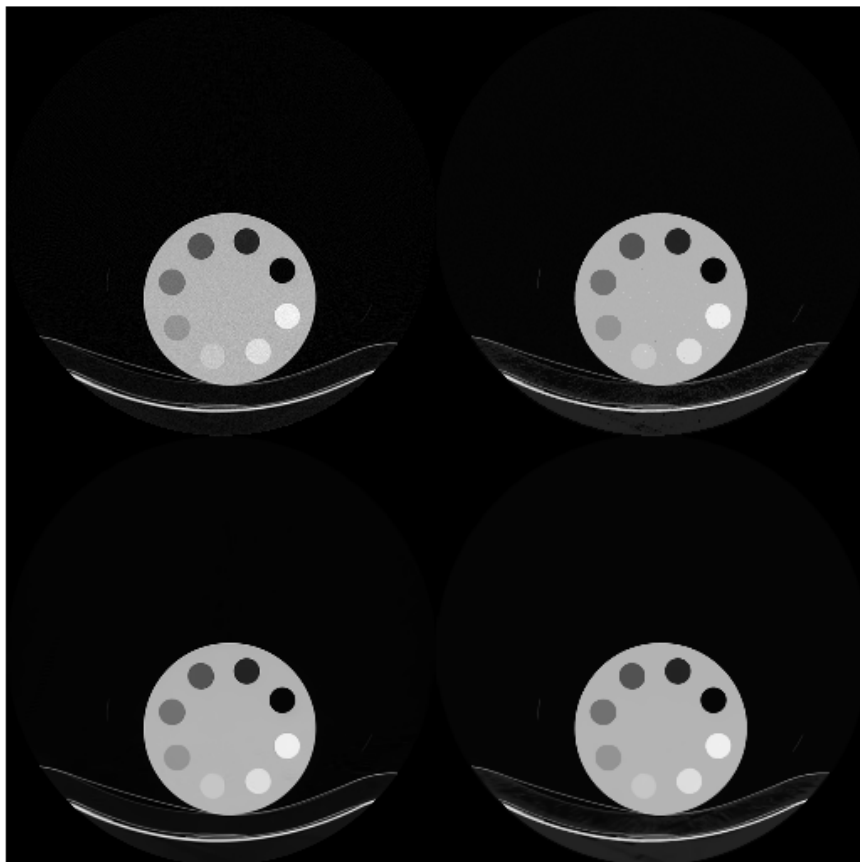


Figura 5.5: Resultados obtenidos mediante el filtro BM3D. Parte superior: imagen original del *phantom* (izqda.) e imagen con varianza estabilizada (dcha.). Parte inferior: filtrado del *phantom* sin estabilizar (izqda.) y tras estabilización (dcha.).

5.4. COMPARATIVA ENTRE AMBOS FILTROS

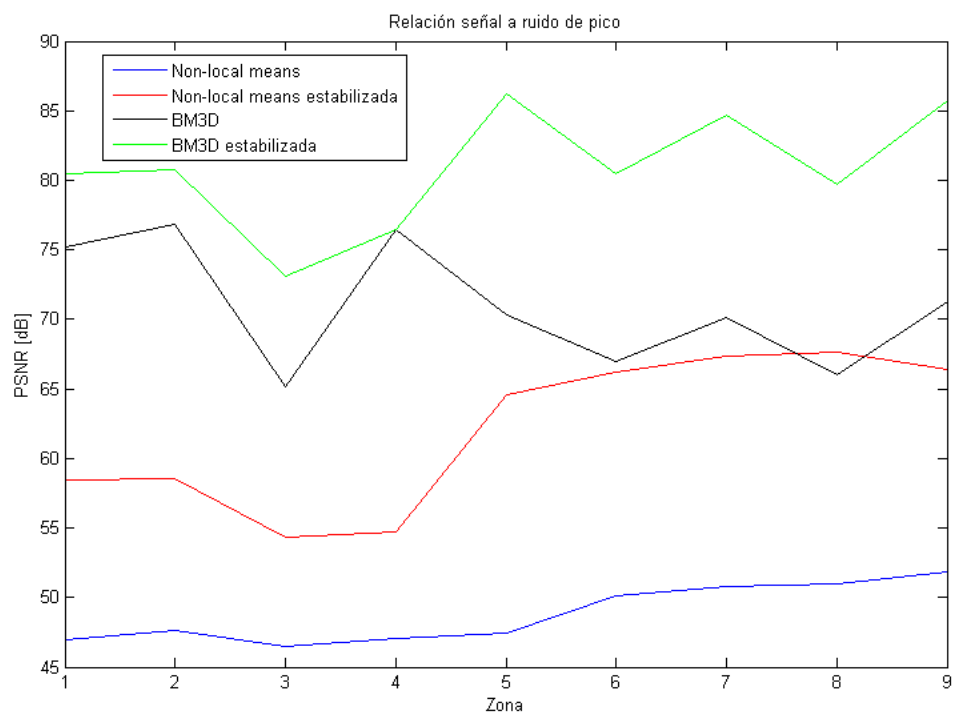


Figura 5.6: PSNR obtenidas para los filtros non-local means y BM3D.

Capítulo 6

Conclusiones y líneas futuras

A lo largo de este trabajo se han ido presentando las conclusiones obtenidas en cada fase. En este capítulo se reúnen todas ellas en detalle y se abren las líneas futuras de investigación en relación con el problema del ruido no estacionario en tomografía computerizada.

6.1. Conclusiones

- **Modelo probabilístico en imagen pulmonar.**

En tomografía pulmonar, los fotones de rayos X recibidos por los detectores a una frecuencia individual obedecen a un proceso de Poisson. No obstante, la amplitud del espectro debida al comportamiento no ideal de la fuente y la radiación producida en las interacciones convierte al proceso de recepción de fotones en un proceso de Poisson compuesto. Tras el procesado que sufre esta señal hasta generar la imagen, reconstruida mediante el algoritmo de las proyecciones filtradas, no se puede garantizar la existencia del modelo de ruido de Poisson compuesto en la imagen final. En este trabajo, se ha demostrado que una manera adecuada de caracterizar el ruido en la imagen es el empleo de un modelo de mezcla de VAs Gamma.

- **Estimación de los parámetros del modelo.**

Partiendo del modelo de mezcla de Gammas, se han estimado los parámetros de una distribución real. Previamente, se ha demostrado mediante métricas de error utilizando datos experimentales que las VA Gamma no centradas ajustan bien las distribuciones de los píxeles a los diferentes niveles de atenuación en HU.

- **Estabilización de varianza**

Para minimizar la dependencia espacial de la varianza del ruido, se ha propuesto una transformación de VA que convierte la mezcla de Gammas en una distribución más manejable. Se ha demostrado que la transformación realizada permite separar de un modo más sencillo la contribución de ruido de la señal, ya que el resultado se aproxima muy bien a una distribución Gaussiana.

- **Eliminación de ruido**

Después de transformar la distribución Gamma en una Gaussiana, se ha estandarizado la nueva VA para conseguir estabilizar el ruido presente en la imagen, de forma que la varianza de la señal ha pasado a tener valores muy parecidos independientemente de la localización. Una vez que se ha conseguido que el ruido sea aditivo Gaussiano, se han comparado los esquemas de filtrado *non-local means* y BM3D, adecuados para este nuevo modelo. Se ha comprobado que efectivamente la previa estabilización de la varianza permite obtener mejores resultados en el filtrado de ruido. Asimismo, ha quedado patente el mejor funcionamiento del algoritmo BM3D en comparación con el *non-local means*, dada su mayor complejidad de diseño, puesto que permite estimar los valores reales de señal tomando como muestras no sólo las que se encuentran próximas espacialmente, sino agrupando muestras presentes en toda la imagen. El haber estabilizado la varianza ha permitido mejorar la precisión en la estimación con el BM3D. Principalmente, porque los valores en HU de las muestras pertenecientes al mismo tejido serán más fiables al no estar alterados por la varianza variable del ruido. De esta forma, el algoritmo estimará de forma más exacta la media de las muestras pertenecientes a los mismos tejidos.

6.2. Líneas Futuras

A lo largo de este proyecto se ha mostrado una metodología útil para la reducción de ruido en TC pulmonares que tiene en cuenta la no estacionariedad del ruido. Esta metodología ha sido probada en un phantom adquirido en un escáner real y reconstruido con un kernel determinado. En el futuro se plantea analizar la bondad de la metodología aquí presentada para distintos kernels y distintas dosis de radiación.

Es de esperar que el modelo de mezclas funcione correctamente debido a que los dispositivos de adquisición están ajustados para obtener los mismos niveles de atenuación con independencia de la dosis y el kernel de reconstrucción. Esto ha sido tenido en cuenta a la hora de “*sintonizar*” el modelo de mezclas con distintos niveles promedio fijos. Una interesante línea futura será comprobar que efectivamente el modelo de mezclas de distribuciones Gamma es capaz de describir la estadística en escenarios más generales como los distintos kernels de reconstrucción como las distintas dosis de radiación.

En este proyecto se ha aplicado la técnica de estabilización de varianza para buscar una transformación que haga los datos más Gaussianos. No obstante, otras transformaciones se podrían haber utilizado con este mismo propósito. En el futuro se valorará emplear transformaciones basadas en equivalencia de cuartiles, para analizar su robustez y precisión en comparación con la transformación basada en estabilización de varianza.

Se analizará la bondad del filtro propuesto para facilitar la segmentación de estructuras de interés en el pulmón como pueden ser las vías aéreas, los vasos o regiones de fibrosis y enfisema.

Bibliografía

- [1] G. Vegas-Sánchez-Ferrero, G. Washko, F. N. Rahaghi, M. J. Ledesma-Carbayo, and R. S. Jos, “Derivation of a test statistic for emphysema quantification,” no. 291820.
- [2] J. Hsieh, *Computed Tomography: Principles, Design, Artifacts and Recent Advances*. second ed. ed., 2009.
- [3] J. A. Seibert, “X-ray imaging physics for nuclear medicine technologists. Part 1: Basic principles of x-ray production.,” *Journal of nuclear medicine technology*, vol. 32, no. 3, pp. 139–147, 2004.
- [4] W. R. Hendee and E. R. Ritenour, *Medical Imaging Physics*. fourth ed., 2002.
- [5] J. A. Seibert and J. M. Boone, “X-ray imaging physics for nuclear medicine technologists. Part 2: X-ray interactions and image formation.,” *Journal of nuclear medicine technology*, vol. 33, no. 1, pp. 3–18, 2005.
- [6] S. C. Bushong, *Radiologic Science for Technologists*. tenth ed., 2012.
- [7] P. Boccacci, “La filtered back projection,” 2002.
- [8] K. Murphy, “Device viewable under an imaging beam,” June 23 2005. WO Patent App. PCT/US2004/040,443.
- [9] P. Gravel, G. Beaudoin, and J. A. D. Guise, “A Method for Modeling Noise in Medical Images.,” *IEEE Transactions of Medical Imaging*, vol. 23, no. 10, p. 12, 2004.
- [10] Y. Fan, H. Lu, H. Zu, X. Tang, and Z. Liang, “An exact modeling of signal statistics in energy-integrating x-ray computed tomography.,” *Proceedings of the SPIE*, vol. 7622, pp. 1–6, 2010.
- [11] B. R. Withing, “Signal statistics of X-ray Computed Tomography,” *Medical Imaging 2002: Physics of Medical Imaging*, vol. 4682, 2002.
- [12] V. Battles, “What is the respiratory system?,” 2014.
- [13] A. T. Figueiredo, “Lecture Notes on Bayesian Estimation and Classification,” no. October, 2004.
- [14] Dempster, “Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM ALgorithm.,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, vol. 39, no. 1, pp. 1–38, 1977.
- [15] T. K. Moon, “The expectation-maximization algorithm,” *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 47–60, 1996.

-
- [16] C. Alberola Lopez, *Probabilidad, variables aleatorias y procesos estocásticos*. first ed., 2004.
- [17] G. Vegas-Sánchez-Ferrero, M. Martín-Fernández, and J. Sanches, “A Gamma Mixture Model for IVUS Imaging,” *Multi-Modality Atherosclerosis Imaging and Diagnostics*, pp. 155–171, 2014.
- [18] T. U. of Texas High-Resolution X-Ray Computed Tomography Facility, “Artifacts and Partial-Volume Effects.”
- [19] G. Vegas-Sánchez-Ferrero, J. Seabra, O. Rodríguez-Leor, A. Serrano-Vida, S. Aja-Fernández, C. Palencia, M. Martín-Fernández, and J. Sanches, “Gamma Mixture Classifier for Plaque Detection in Intravascular Ultrasonic Images.,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 61, no. 1, pp. 44–61, 2014.
- [20] G. Ramos, “Filtro de difusión anisótropo con memoria basado en modelos probabilísticos para imágenes intravasculares y cardíacas,” Master’s thesis, Universidad de Valladolid, 7 2012.
- [21] L. Simar, “Maximum Likelihood Estimation of a Compound Poisson Process.,” *The analysis of statistics*, vol. 4, no. 6, pp. 1200–1209, 1976.
- [22] H. Lu, I.-T. Hsiao, X. Li, and Z. Liang, “Noise properties of low-dose CT projections and noise treatment by scale transformations.,” *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2001 IEEE*, vol. 3, pp. 1662–1666, 2001.
- [23] B. Goossens, A. Pizurica, and W. Philips, “Wavelet Domain Image Denoising for Non-Stationary Noise and Signal-Dependent Noise.,” *IEEE International Conference on Image Processing*, pp. 1425–1428, 2006.
- [24] J. Wang, T. Li, H. Lu, and Z. Liang, “Noise Reduction for Low-Dose Single-Slice Helical CT Sinograms.,” *IEEE Transactions on Nuclear Science*, pp. 1230–1237, 2006.
- [25] J. Xu and B. M. W. Tsui, “A compound poisson maximum-likelihood iterative reconstruction algorithm for X-ray CT.,” *9th Int. Meet. Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, pp. 108–111, 2007.
- [26] G. E. P. Box and D. R. Cox, “An Analysis of Transformations.,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, vol. 26, no. 2, pp. 211–252, 1964.
- [27] M. S. Bartlett, “The use of transformations.,” *Biometrics*, vol. 3, no. 1, pp. 39–52, 1947.
- [28] S. Miller and D. Childers, *Probability and Random Processes: With Applications to Signal Processing and Communications*. second ed., 2012.
- [29] E. W. Stacy, “A Generalization of the Gamma Distribution.,” *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 33, no. 3, pp. 1187–1192, 1962.
- [30] M. Khodabin and A. Ahmadabadi, “Some properties of generalized gamma distribution.,” *Mathematical Sciences*, vol. 4, no. 1, pp. 9–28, 2010.

- [31] A. Buades, B. Coll, and J. M. Morel, “A non-local algorithm for image denoising.,” *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, vol. 2, no. 2, pp. 60–65, 2005.
- [32] A. Tristán-Vega, V. García-Pérez, S. Aja-Fernández, and C.-F. Westin, “Efficient and Robust Nonlocal Means Denoising of MR Data Based on Salient Features Matching.,” *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, vol. 105, no. 2, pp. 131–144, 2012.
- [33] K. Dabov, A. Foi, V. Katkovnik, and K. Egiazarian, “Image Denoising by Sparse 3D Transform-Domain Collaborative Filtering.,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 16, no. 8, pp. 2080–2095, 2007.
- [34] M. Lebrun, “An Analysis and Implementation of the BM3D Image Denoising Method.,” *Image Processing On Line*, vol. 2, pp. 175–213, 2012.